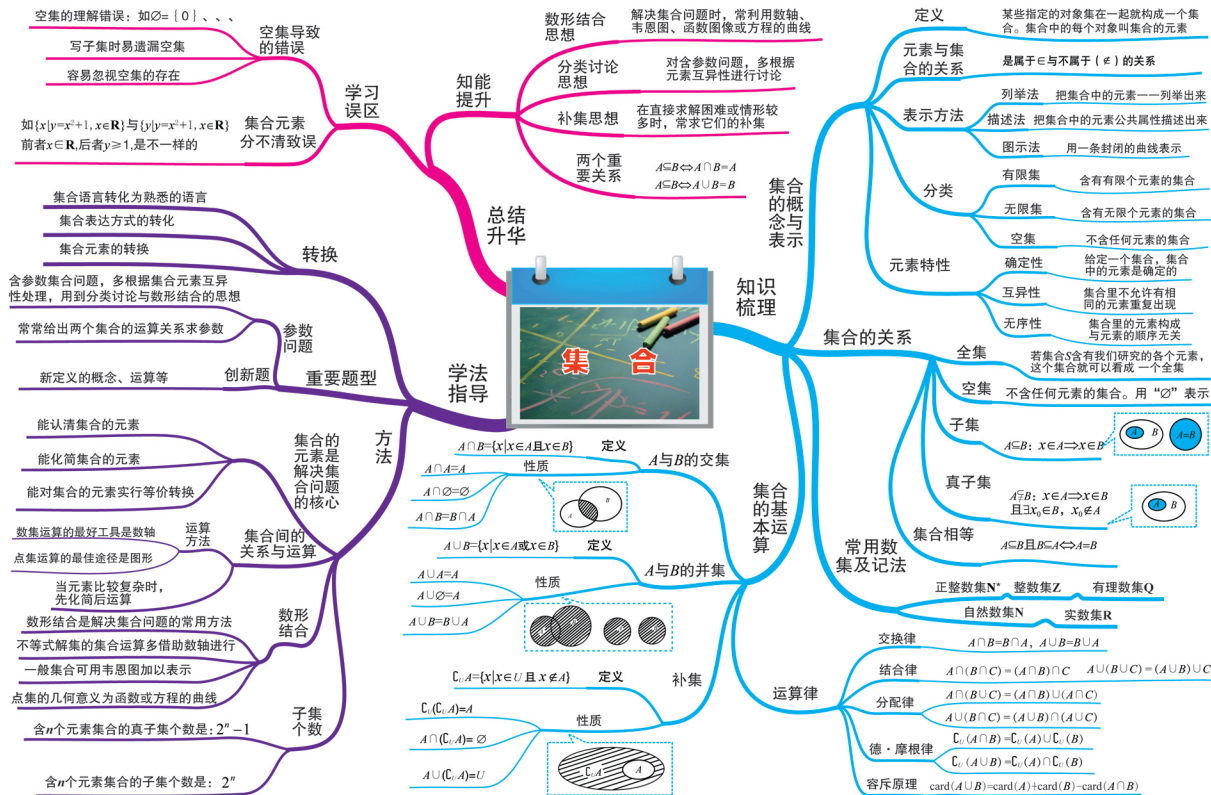


高中数学 第一章 集合与常用逻辑用语 第一节 集合



高中数学 第一章 集合与常用逻辑用语 第二节 常用逻辑用语

反证法、选否证法、补集思想这三种方法是在命题证明或求参数比较困难的情况下所采取的等价转换

“或”“且”联结词的否定形式。
类似于集合中的德·摩根定律

同一全称命题与特称命题，由于自然语言的不同，有不同的表达形式

1. 写出一个命题的其他命题，易错的是分不清原命题的条件和结论，不按定义来写

2. 判断命题的真假时出错，不能借助原命题与逆否命题及逆命题与否命题同真假来判断

3. 判断充分性、必要性出错：一个结论成立的充分条件可以不止一个，必要条件也可以不止一个

4. 证明充要条件时，推理方向把握不准

5. 反证法或写否命题时易出现命题的否定不全面

知能提升

学习误区

命题问题

已知原命题写出其他三种命题

含逻辑联结词“且”“或”“非”命题

全称量词与特称量词的否定

判断命题的真假
直接判断或判断命题的否定

1. 搞清命题的结构

2. 弄清构成它的 p 、 q 的真假

3. 依真值表判断命题的真假

根据含逻辑联结词命题的真假，求参数的取值范围

否命题：若 $\neg p$ ，则 $\neg q$

命题的否定：若 p ，则 $\neg q$

全称命题与特称命题的否定

全称命题 p ：“ $\forall x \in A, p(x)$ ”

否定是 $\neg p$ ：“ $\exists x \in A, \neg p(x)$ ”

特称命题 p ：“ $\exists x \in A, p(x)$ ”

否定是 $\neg p$ ：“ $\forall x \in A, \neg p(x)$ ”

常用正面叙述主词及其否定词语

正面词语	等于	大于	小于	是	都是	至多有一个	至少有一个	任意	所有的	一定
否定词语	不等于	不大于	不小于	不是	不都是	至少有两个	一个也没有	某个	某些	不一定

总结升华

学法指导

判定

转化法

对命题进行转化，改判逆否命题的真假

集合法

当命题的条件和结论之间的关系判断有困难时，可以从集合的角度加以判断

证明探究

证明充要条件首先要分清必要性、充分性分别是什么命题，再证明原命题与逆命题都成立

解充要条件问题与求解一般问题并无多大区别，所不同的是每一步变形转化过程必须是等价的

应用

一般是将命题的真假关系转换为集合关系已知 p 是 q 的什么条件，求解有关问题

给出了“若 p ，则 q ”“若 q ，则 p ”的真假

知识梳理

含逻辑联结词的命题

命题

简单命题

不含逻辑联结词的命题

逻辑联结词

复合命题

简单命题与逻辑联结词构成的命题

且

p 且 q ，记作 $p \wedge q$

或

p 或 q ，记作 $p \vee q$

非

非 p ，记作 $\neg p$

含逻辑联结词命题真假判断

$p \wedge q$ p 、 q 同真为真

$p \vee q$ p 、 q 同假为假

$\neg p$ p 真（假） $\neg p$ 假（真）

四种命题

形式

原命题：若 p ，则 q

逆命题：若 q ，则 p

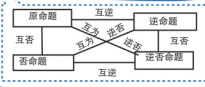
否命题：若 $\neg p$ ，则 $\neg q$

逆否命题：若 $\neg q$ ，则 $\neg p$

关系

等价命题 互为逆否的两个命题

互为逆否命题 原命题与逆否命题、逆命题与否命题



反证法

判断原命题的逆否命题的真假

全称量词“ $\forall$ ”与存在量词“ $\exists$ ”

全称命题 “ $\forall x \in A, p(x)$ ”

特称命题 “ $\exists x \in M, p(x)$ ”

含一个量词命题的否定

充分条件与必要条件

定义

若 $p \Rightarrow q$ ，则 p 是 q 成立的充分条件

若 $q \Rightarrow p$ ，则 p 是 q 成立的必要条件

若 $q \Leftrightarrow p$ ，则 p 是 q 成立的充要条件

从集合的观点看

$A \subseteq B$ ，则 p 是 q 的充分条件

$A \supseteq B$ ，则 p 是 q 的必要条件

若 $A=B$ ，则 p 是 q 的充要条件

高中数学 第二章 函数 第一节 函数及其表示

转化技巧：通常 $a > f(x)$ 或 $a < f(x)$ 恒成立时，常转化为函数 $y = f(x)$ 的最值问题。 $a > f(x)$ 恒成立，须 $a > f(x)_{\max}$ ； $a < f(x)$ 恒成立，须 $a < f(x)_{\min}$ 。

通常在 $f(x)$ 存在最值的情况下使用



1. 对称轴在区间右边
2. 对称轴在区间内
3. 对称轴在区间左边

轴动区间定（与上相仿）

1. 整式函数或奇次根式函数，则定义域为 $\mathbf{R}$

2. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ，则定义域是 $h(x) \neq 0$ 的解集

3. $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ ($n \in \mathbf{N}^+$)，则定义域是 $g(x) \geq 0$ 的解集

4. 对数函数的真数必须大于零，对数函数和指数函数的底数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$

5. 函数 $y = [f(x)]^n$ 的定义域是 $f(x) \neq 0$ 的解集

6. 函数 $y = \tan x$ 的定义域是 $\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$

7. 若解析式由几个部分的数学式子构成，则定义域是使各部分式子都有意义的实数集（即求各部分的交集）

8. 实际问题中函数的定义域是使变量都有意义且符合实际的实数集合

1. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$ ，求 $f[g(x)]$ 的定义域，方法是令 $a \leq g(x) \leq b$ ，解出 x 为所求

2. 已知 $f[g(x)]$ 的定义域为 $[a, b]$ ，求 $f(x)$ 的定义域，方法：由 $f[g(x)]$ 中的 $a \leq g(x) \leq b$ ，求出 $g(x)$ 的范围，即为 $f(x)$ 中的范围

3. 已知 $f[g(x)]$ 的定义域为 $[a, b]$ ，求 $f[h(x)]$ 的定义域，方法：转化为 1 与 2，由 2 求出 $f(x)$ 的定义域，再由 1 得到 $f[h(x)]$ 的定义域

函数定义理解不到位

定义域理解不到位：易把 $f(x)$ 与 $f(x+1)$ 混淆为同一函数

分离变量解决不等式恒成立问题

知能提升

最值讨论
 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$



学习误区

概念

知识梳理

总结升华



函数及其表示

学法指导

值域与最值

关系

求法

基本函数法

函数单调性法

配方法

判别式法

不等式法

换元法

反函数法

数形结合法

导数法

注：以上方法求函数解析式时一定要考虑并确定自变量 x 的取值范围，所求函数式必须注明定义域

根据图像求函数式

解析式的求法

代入法

待定系数法

配凑法

换元法

方程组法

特殊值法

定义域的求法

具体函数

抽象函数

参数问题

如定义域为 $\mathbf{R}$ ，求参数范围

思想

分类讨论，特别是二次方程二次项系数是否为零的讨论

方法

二次函数图象法

分离变量法

导数法

映射 $f: A \rightarrow B$



函数定义

设 A, B 是 $\mathbf{R}$ 上非空数集，映射 $f: A \rightarrow B$ 叫做集合 A 到 B 上的一个函数。记作 $y = f(x), x \in A$

关系

函数是一类特殊的映射，对应关系有一对一、多对一，无一一对。它要求 A, B 非空且元素皆为实数

表示法

列表

利用表格来表示两个变量的函数关系的方法

图象

利用图象来表示两个变量的函数关系的方法

解析

利用数学等式来表示两个变量的函数关系的方法

定义域

自变量的取值范围

对应法则

自变量 x 到对应函数值 y 的对应关系式往往以关系式形式出现，又称解析式

值域

函数值的取值范围

定义

对于自变量 x 的不同取值集合，有不同对应关系的函数

分段函数

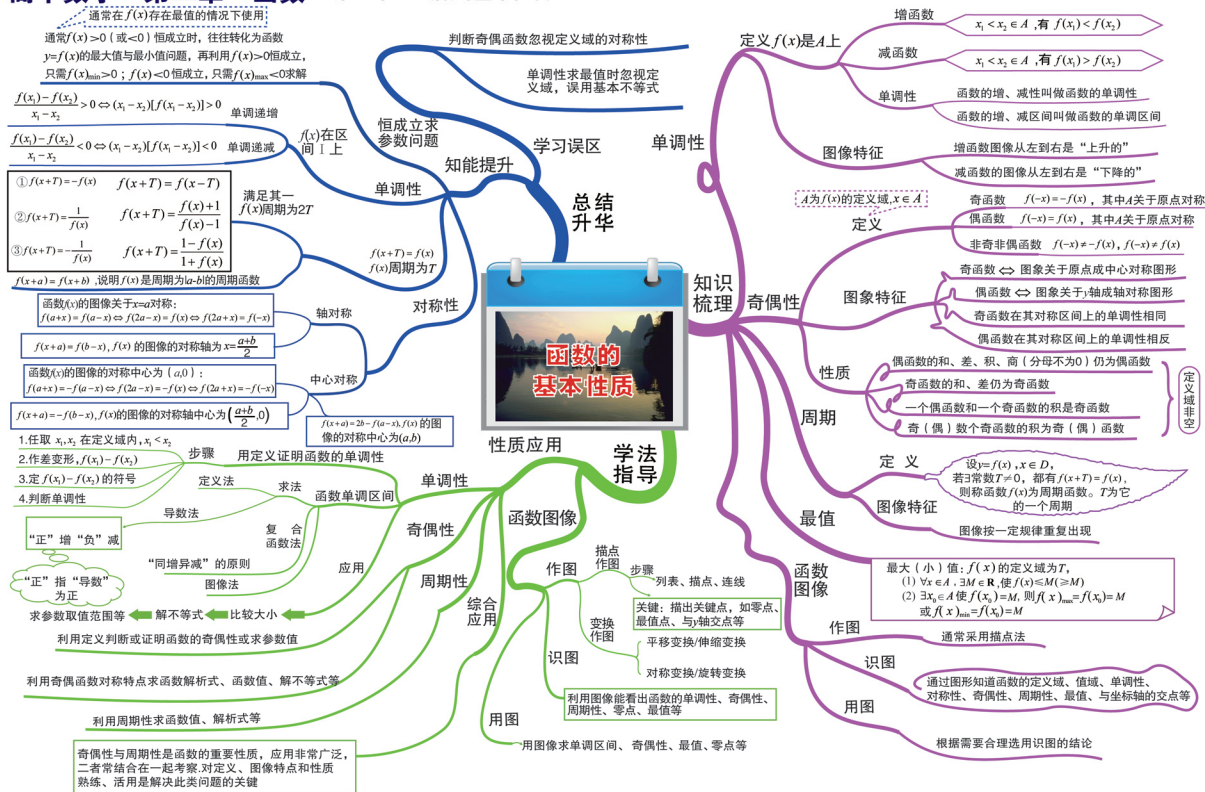
分段函数各段对应的图像

定义域

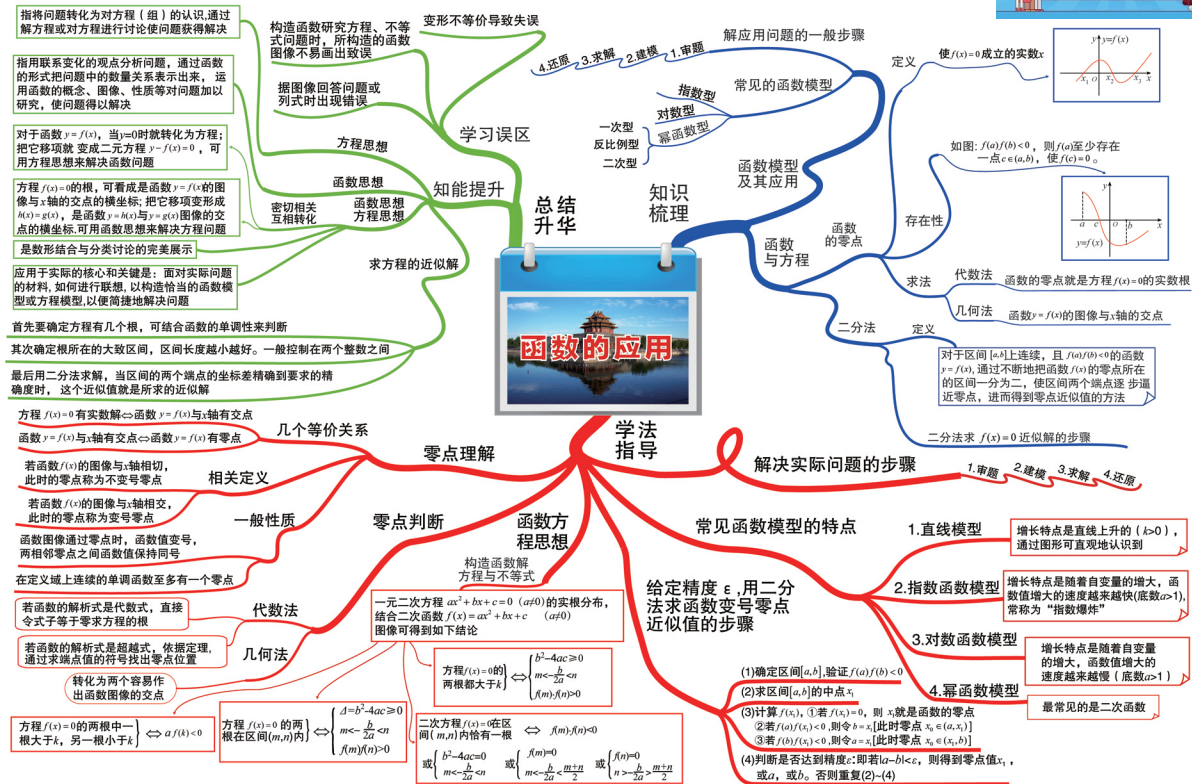
定义域是各段函数定义域的并集，值域是各段值域的并集

值域

高中数学 第二章 函数 第二节 函数的基本性质



高中数学 第二章 函数 第四节 函数的应用



高中数学 第三章 三角函数 第二节 任意角的三角函数及诱导公式

求三角函数的定义域，除了使已知的式子有意义外，三角函数本身的定义域也不可忽视。

如 $\tan x$, $\sec x$, $\csc x$ 中的 x 取值需特别注意

忽视三角函数定义域致误

学习误区

给定一个角，它的三角函数值是唯一确定的（除不存在）；

给值求角出现漏角致误

反过来，给定一个三角函数值，有无穷多个角和它对应

消除等式两边的差异，有目的地化简

实质 证明三角恒等式

知能提升

1. 从一边开始，证得它的另一边，一般由繁到简

即证明左右两边都等于同一个式子

2. 左右归一法

针对题设与结论的差异，有针对性地变形，以消除其差异，简言之，即化异为同的方法

3. 凑合方法

即证明“左边-右边=0”或“左边÷右边=1”

4. 比较法

5. 分析法

从被证的等式出发，逐步探求使等式成立的充分条件，一直到已知条件或明显的事实为止，就可以断定原等式成立

角终边上任意一个不同于原点的点 P 的横坐标 x ，纵坐标 y ，点 P 到原点的距离 r ，可间接地转化为线段，通过线段的比得出特殊角的三角函数值

根据三角函数的定义，求特殊角的三角函数值

1. 三角函数线中字母顺序不可颠倒

2. 与坐标轴方向一致的有向线段为正，此时相应的三角函数值为正；与坐标轴方向相反的有向线段为负，此时相应的三角函数值为负

3. 角 α 的终边在 x 轴上时，正切线、正弦线变为一个点；角 α 的终边在 y 轴上时，余弦线变为一个点，正切线不存在

4. 若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，则 $\sin \alpha < \tan \alpha$ ， $\sin \alpha > \cos \alpha$

判断三角式的符号

判断角所在的象限

估算求值

三角函数中的不等式证明

三角函数值大小的比较

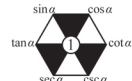
奇偶是指整数 k 为奇数或偶数

变指正、余弦互变，正、余切互变

符号是把 α 看做锐角时，原函数的符号

“奇变偶不变，符号看象限”

同角关系



对角线上两函数之积为1:任一角的函数等于与其相邻的两个函数的积;阴影三角形,顶角的两个函数的平方和等于底角函数的平方

三角函数线

学法指导

同角关系应用

1. 三角函数值间的“知一求二”，求式子的值

2. 化简三角函数式

3. 证明三角恒等式

变形技巧

已知一个角的一种三角函数值，求这个角的其他三角函数值

三种基本题型

诱导公式 $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$

α 为任意角，为记忆方便，把 α 看做锐角，则 $-\alpha$ 是第四象限角， $\pi+\alpha$ 是第三象限角， $\pi-\alpha$ 是第二象限角

求值类型

角的象限或终边已知，只有一解
角的象限或终边需要判断，有一解或两解
角的三角函数值含有字母或用另一个角的三角函数来表示这个三角函数

解法

合理选择公式，一般思路是按“倒、平、例、高、侧”的顺序很容易求解

在开平方时，应注意“±”的取舍，有时需要分类讨论

化简类型

目的是简化运算，要求项数尽量少，次数尽量少，尽量不含分母，尽量不带根号，尽量化为数值

证明类型

三角恒等式

三角函数的定义

角 α 的正弦: $\sin \alpha = \frac{y}{r}$

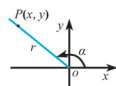
角 α 的余切: $\cot \alpha = \frac{x}{y}$

角 α 的余弦: $\cos \alpha = \frac{x}{r}$

角 α 的正割: $\sec \alpha = \frac{r}{x}$

角 α 的正切: $\tan \alpha = \frac{y}{x}$

角 α 的余割: $\csc \alpha = \frac{r}{y}$



三角函数值在各象限的符号

正弦上为正 余弦右为正 正切一三为正



三角函数的定义域

$\sin \alpha: \{ \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\cos \alpha: \{ \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\tan \alpha: \{ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \}$

$\cot \alpha: \{ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

$\sec \alpha: \{ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \}$

$\csc \alpha: \{ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

三角函数线



诱导公式

角 α 的三角函数值可以用单位圆的有向线段表示: $\sin \alpha = MP$, $\cos \alpha = OM$, $\tan \alpha = AT$. 有向线段 MP 、 OM 、 AT 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线

$2k\pi \pm \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$)、 $-\alpha$ 、 $\pi \pm \alpha$ 的三角函数值等于 α 的同名三角函数值，前面加上一个把 α 看做锐角时原函数值的符号

$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ 、 $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ 的三角函数值等于 α 的余角函数值，前面加上一个把 α 看做锐角时原函数值的符号

同角三角函数的基本关系

倒数关系

$\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1$ $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

商数关系

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

平方关系

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$ $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

负角化正角、大角化小角、化异为同; 常用诱导公式

切割化弦, 弦切互化

“1”的代换 $1 \pm \sin \alpha = \cos \alpha \pm \tan \alpha \csc \alpha$ $1 - \sin \alpha = \cos \alpha - \tan \alpha \csc \alpha$ $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

消元和降次

$\sin \alpha \pm \cos \alpha$, $\sin \alpha \cos \alpha$ 三个式子中，已知其中一个式子，可求其他两个式子。它隐含一个条件：弦的平方和为1

高中数学 第三章 三角函数 第三节 三角函数的图像与性质



三角函数在整个定义域内没有单调性，只是在局部有单调性

单调性致误

正弦、余弦函数图像的对称中心为图像与x轴的交点。而正切函数图像的对称中心除了图像本身与x轴的交点，还有其渐近线与x轴的交点

对称性致误

平移变换由 φ 决定，伸缩变换由 ω 决定 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 中的变换

正、余弦函数的
图形变换易错点

用函数建模解实际问题时，易错之处是忽略实际问题中自变量的取值范围

是对三角知识的综合考察，是函数思想的具体体现 三角函数最值问题

知能提升

三角函数是基本初等函数，是周期现象的重要模型 周期模型

与向量、复数的结合 工具性

由函数 $y=\sin x$ 的图像得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ，要理解 A 、 ω 、 φ 在变换中所起的作用。这种变换方法还可以推广到其他三角函数乃至一般函数，如 $y=f(x)$ 与 $y=Af(x)$ ， $y=f(\omega x)$ ， $y=Af(\omega x)$

按照列表、描点、连线三步作出
正弦函数、余弦函数图像的方法

1. 描点法

三角函数
图像的画法

用三角函数线来作出函数图像

2. 几何法

先描出五个关键点，再用光滑的曲线连起来

3. “五点法”

在精度要求不高时，常常采用“五点法”

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

叫做振幅，周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ ， $f=\frac{1}{T}$ 叫做频率， $\omega x+\varphi$ 叫相位， φ 叫初相

把函数 $y=\sin x$ 图像上所有点向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<0$)

平移 $|\varphi|$ 个单位，得到 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图像

相位变换

把函数 $y=\sin x$ 图像上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，

得到 $y=\sin \omega x$ 的图像

周期变换

把函数 $y=\sin x$ 图像上所有点的纵坐标伸长为原来

的 A 倍，得到 $y=A\sin x$ 的图像

振幅变换

判断三角函数值
大小的基本程序

1. 判定各角所在的象限

2. 估计各三角函数值的大致范围

3. 对于大致范围相同的三角函数值，把不同名的三角函数值化为同名的三角函数值

4. 把这些同名且不在同一单调区间上的三角函数，用诱导公式化为同一单调区间上的

5. 利用三角函数的单调性比较大

作出函数的图像来
确定其最小正周期

$f(x+T)=f(x)$

c. 定义验证法

正、余弦 $T=\frac{2\pi}{\omega}$

正切、余切 $T=\frac{\pi}{\omega}$

a. 结论法

b. 图像法

学法指导

奇偶性

判断方法

1. 定义法

利用定义判定，即判定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系

2. 图像法

利用图像的对称性
来确定其奇偶性

3. 验证法

即验证 $f(-x) \pm f(x) = 0$
或 $\frac{f(-x)}{f(x)} = \pm 1$ 是否成立

步骤

1. 一般情况下，需先
对函数式进行化简

2. 求函数的定义域

3. 依据函数的定义域是否为
关于原点对称的点集，判断
函数的奇偶性

4. 若定义域不能判断，再用定义法等方法

已知三角函数值求角

实际上是求解最简单的三角方程，若所求角的范围不限定在某个单调区间内，则得出的解不是唯一的

图像与性质

正弦、余弦、正切函数的
图像与性质

解析式	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图像			
定义域	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
周期性	2π	2π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	在 $[\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}, \frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{2}]$ 上 在 $[\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}, \frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}{2}]$ 上 $k \in \mathbb{Z}$	在 $[2k\pi-\pi, 2k\pi]$ 上 在 $[2k\pi, 2k\pi+\pi]$ 上 $k \in \mathbb{Z}$	在 $(\frac{k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}}{2})$ 上 $k \in \mathbb{Z}$
对称轴	$(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$	$(\frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbb{Z}$	$(\frac{k\pi}{2}, 0), k \in \mathbb{Z}$
对称轴	$x=k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x=k\pi, k \in \mathbb{Z}$	无

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$
的图像与性质

把横坐标变为原来的
 $\frac{1}{\omega}$ 倍得 $y=\sin \omega x$

沿x轴向左平移 $|\varphi|/\omega$ 个
单位长度得 $y=\sin(\omega x+\varphi)$

向左($\varphi>0$)或向右
($\varphi<0$)平移 $|\varphi|/\omega$ 个单位
长度得 $y=\sin(x+\varphi)$

把横坐标变为原来的
 $\frac{1}{A}$ 倍得 $y=A\sin(x+\varphi)$

把纵坐标变为原来的 A 倍得 $y=A\sin(x+\varphi)$

注意

1. 由 $y=\sin x$ 得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的过程体现了
由简单到复杂、由特殊到一般的思想

2. 若 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中的 $\omega<0$ ，可先利用诱导公式
把 x 前的系数变为正的，然后再进行变换

当 $A>0$ 时，最大值为 A ，最小值为 $-A$

对称轴、对称中心：对称轴过最大值点，对称中心过函数的零点

奇偶性

$\varphi=k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 时为奇函数

$\varphi=k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 时为偶函数

单调性问题

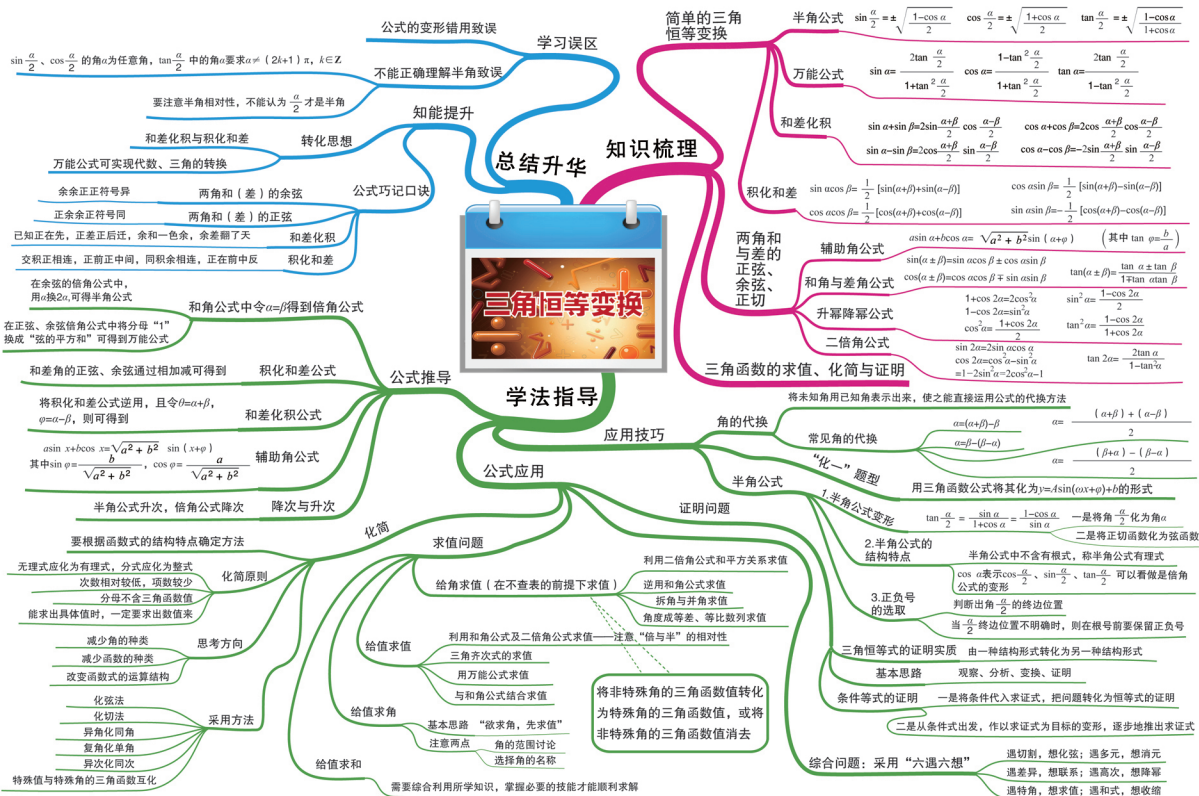
1. 正、余弦函数的单调性： $\omega x+\varphi$ 看成一个整体

2. 复合函数的单调性法则：“同增异减”

函数的周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$

周期性

高中数学 第三章 三角函数 第四节 三角恒等变换



高中数学 第三章 三角函数 第六节 解三角形

总结升华

知识梳理

学法指导

实际应用问题

解三角形

三角形形状的判定

应用

三角形的面积定理

射影定理

余弦定理

正弦定理



应用正弦定理解两类三角形

应用余弦定理解两类三角形

判定该三角形有无特殊的边、角

三角形形状的判定

目的

用余弦定理判定三角形形状

(1) 全部集中在一个三角形中

用正、余弦定理求解

(2) 涉及两个(或两个以上)三角形

先作出这些三角形, 解够条件的三角形

然后逐步求出其他的解

有时需设出未知量, 从几个三角形中列出方程组求解

学习误区

忽视隐含条件出错

不注意角的范围出错

知能提升

解斜三角形体现了数学建模的思想

向量与三角函数的综合问题

把线段看成是某个向量的模, 用向量为工具研究夹角与距离

1. 从实际问题出发, 经过抽象概括, 把实际问题转化为具体的数学模型
2. 然后通过推理演算, 得出数学模型的解
3. 再还原成实际问题

1. 结合向量的平行与垂直、长度与夹角、平移等来考查

(1) 已知两角和任意一边, 如 B, C, a 。
由 $A+B+C=180^\circ$, 先求 A , 再据正弦定理求出 b, c

(2) 已知两边和其中一边的对角, 如 a, b, A (锐角)。
由正弦定理先求 B 角, B 角可能有一解 ($\sin A=a$)。
二解 ($\sin A < a$) 或无解 ($\sin A > a$)。按 (1) 求解。
 A 为钝角或直角时只有一解

(3) 已知三边求各角, 如 a, b, c 。
由余弦定理先求 A 角, B 角可能有一解 ($\sin A=a$)。
二解 ($\sin A < a$) 或无解 ($\sin A > a$)。按 (1) 求解。
 A 为钝角或直角时只有一解

(4) 已知两边和它们的夹角, 如 a, b, C 。
由余弦定理求出 c 边, 按 (3) 求解

$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$ 关系式

进行三角恒等变换, 求出角之间的关系式 目的

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

关系式

化角为边

$$\sin A = \frac{a}{2R} \quad \sin B = \frac{b}{2R} \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

R 为三角形外接圆半径

用方程思想进行代数恒等变形, 求出边之间的关系式

若 $a^2 + b^2 = c^2$, 则三角形是直角三角形

若 $a^2 + b^2 < c^2$, 则三角形是钝角三角形

若 $a^2 + b^2 > c^2$, 则三角形是锐角三角形

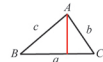
正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
 R 是三角形外接圆的半径



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acosc B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos C$$



$$a = bcos C + ccos B$$

$$b = ccos A + acos C$$

$$c = acos B + bcos A$$

$$S = \frac{1}{2}absin C = \frac{1}{2}bc sin A = \frac{1}{2}ac sin B$$

其他面积定理: $S = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c), R, r \text{ 分别为外接、内切圆的半径}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$$

正弦定理可以解决

已知两角和任意一边, 可求其他两边一角
已知两边和其中一边的对角, 求另一边的角 (进一步求出其他的边)

余弦定理可以解决

已知三边求各角
已知两边和它们的夹角, 求第三边。
(进一步求出其他的边)

方法一: 化边为角, 再进行三角恒等变换, 求出三个角之间的关系式

方法二: 化角为边, 再进行代数恒等变换, 求出三边之间的关系式

3. 测量中的有关名称、术语

仰角和俯角
方向角
方位角
坡度



测出基线 BC 长及 α, β 角

实际上这是已知两个角和一边解三角形的问题, 用正弦定理即可解决

(1) 测量 AB : B 可到达, A 不可到达

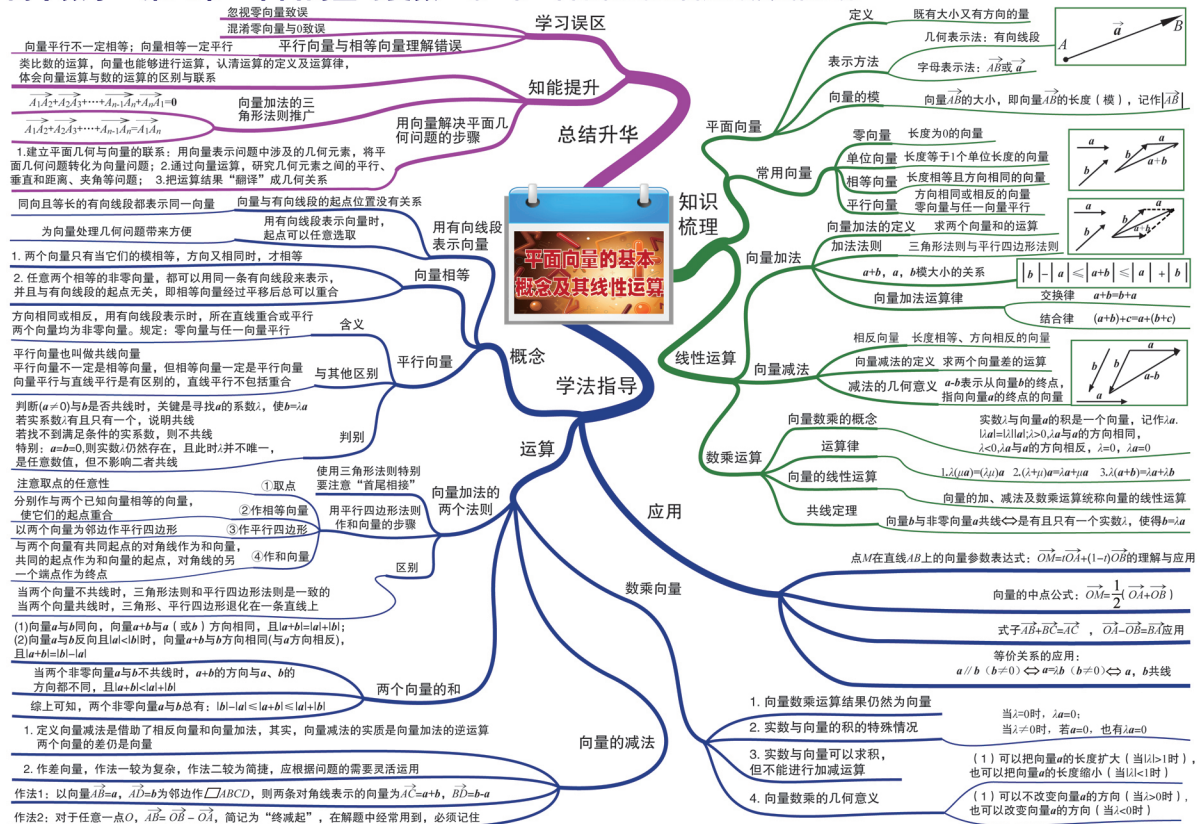
测出基线 CD 长, 测出角 $\angle ACD, \angle ADC$, 求出 AC 或 AD
再测出 $\angle BCD, \angle ADB$, 可求出 BC 或 BD
最后测出 $\angle ADB$ 或 $\angle ACB$, 就能求出 AB

(2) 测量 AB :
 A, B 两点不可到达

先求一个可到达点到另一个不可到达点的距离问题, 再把不可到达的两点 A, B 之间的距离转化为利用余弦定理求三角形边长的问题
 B 不在 A, C, D 所在的平面, 测出 $\angle ADB$ 或 $\angle ACB$ 为仰角



高中数学 第四章 平面向量与复数 第一节 平面向量的基本概念及其线性运算



高中数学 第四章 平面向量与复数 第二节 平面向量基本定理及其数量积

两线段平行，则两线段不在同一直线上
两向量平行，则表示向量的有向线段可以在一条直线上
向量坐标与起点坐标和终点坐标有关
相等向量坐标是相等的，但起点坐标与终点坐标不一定相同

向量平行与两线段平行混淆致误
向量坐标与点的坐标混淆致误
找错两向量的夹角导致失误

学习误区

总结
升华

向量的概念揭示了向量与几何、代数之间的关系，运用向量方法可将几何性质的研究转化为向量的运算，使几何问题通过向量运算得到解决，从而拓展了几何的研究空间
学习向量时，注意体会数形结合的思想方法，提高观察、类比、分析、概括等思维能力
向量的几何运算与坐标运算是图形上的几何运算和坐标下的代数运算，说明向量是数形结合的结合体

向量与解析几何在平面直角坐标系中，有序实数对 (x, y) 既可以表示一个固定的点，又可以表示一个向量。使向量和解析几何有密切联系。特别是平行、垂直、夹角与距离等问题

e_1, e_2 是同一平面内的两个不共线的向量，即 e_1, e_2 应该为非零向量

在同一平面内任意向量 a 都可用 e_1, e_2 线性表示，
且 e_1, e_2 前面的系数唯一，也就是说这种表示形式是唯一的

对基底的选取不唯一，只要是同一平面内的两个不共线的向量，都可作为基底

向量的坐标是 (x, y) ，是指对于 $i=(1, 0), j=(0, 1)$ 来说， a 可以表示成 $x i+y j$ 的形式。如果 $i \neq (1, 0), j \neq (0, 1)$ 至少有一个不成立，即使 $a=x i+y j$ ，也不能判定 a 的坐标就是 (x, y)

向量的坐标与表示向量的有向线段的起点、终点的具体位置无关，只与其相对位置有关

建立直角坐标系：一方面可以将平面内任一向量用一对有序实数来表示；另一方面，任一有序实数对就表示一个向量的坐标

相等向量的坐标是相同的，但起点和终点的坐标不一定相同

平面向量基本定理注意

学法指导



知识梳理

平面向量基本定理

坐标运算

定理

平面向量的数量积

数量积的性质

数量积的定义

推论

投影

向量的坐标表示

两个向量共线的充要条件的应用

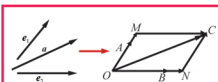
向量的数量积

数量积的理解

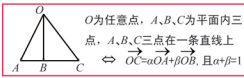
数量积的性质

数量积坐标运算

常用公式



向量 e_1, e_2 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于该平面内的任一向量 a ，存在唯一一对实数，使得 $a=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2$ ，我们把 e_1, e_2 叫做这一平面内所有向量的一组基底



$|a| \cos \theta$ 叫做向量 a 在 b 方向上（ b 在 a 方向上）的投影

a 的长度在 b 方向上的投影的乘积 数量积的几何意义

1. 平面几何中的应用 平移、全等、相似、长度、距离、夹角等

2. 解析几何中的应用 直线向量与斜率的关系、直线的法向量

3. 物理中的应用 力、速度、加速度、位移以及运动的合成与分解等

1. 平面向量的坐标表示

向量 OA 的坐标等于 A 点的坐标

若 $a=(x_1, y_1), b=(x_2, y_2)$ ，则

(1) $a+b=(x_1+y_1, y_1+y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$ ；

(2) $\lambda a=\lambda(x_1, y_1)$

2. 向量运算的坐标表示

若 $a=(x_1, y_1), b=(x_2, y_2)$ ，则 $a \parallel b \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

3. 向量平行的坐标表示

若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

4. A, B 两点对应的向量

设 $a=(x_1, y_1), b=(x_2, y_2)$ ，则

(1) $a=(x, y) \Leftrightarrow |a|=\sqrt{x^2+y^2}$

若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

数量积的坐标运算

(两点间的距离公式)

(2) $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

(3) $a \perp b \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

设 a, b 都是非零向量， e 是与 b 方向相同的单位向量， θ 是 a 与 e 的夹角，则

(1) $e=a \cdot a=|a| \cos \theta$

(2) $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b=0$

(3) 当 a 与 b 同向时， $a \cdot b=|a| |b|$ ；

当 a 与 b 反向时， $a \cdot b=-|a| |b|$ ；

特别地， $a \cdot a=|a|^2$ 或 $|a|=\sqrt{a \cdot a}$

(4) 若 θ 为 a, b 的夹角，则 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$

(5) $|a \cdot b| \leq |a| |b|$

已知两个非零向量 a 和 b ，

作 $\overrightarrow{OA}=a, \overrightarrow{OB}=b$ ，则 $\angle AOB=\theta$

($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) 叫做向量 a 与 b 的夹角

向量的数量积

向量的数量积

向量的数量积

向量的数量积

向量的数量积

向量的数量积

向量的数量积

向量的数量积

向量的数量积

① $|a|=\sqrt{a^2}$ ； ② $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ； ③ $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

高中数学 第四章 平面向量与复数 第三节 数系的扩充与复数引入

复数为纯虚数的充要条件是实部为0，虚部不为0，两者缺一不可

复平面内的复数 $z=a+bi$ (a, b 是实数)对应的点 Z 的坐标是 (a, b) ，而不是 (a, bi) ，也就是说，复平面内坐标轴上的单位长度是1，不是 i

把 $i^2=-1$ 当做 $i^2=1$ 来运算，漏掉负号

虚数与纯虚数

实轴、虚轴与 x 轴、 y 轴

复数与实数、虚数

复数的运算法则与实数的运算法则

把复数问题巧妙地转化成熟悉的问题，是求解复数问题常用的技巧，转换成几何问题是其中技巧之一

实系数一元二次方程若存在虚根，则此两虚根互为共轭；若虚系数一元二次方程存在实根，不能用判别式判断

熟练掌握四则运算法则是解决此类问题的关键

$a, b, c, d \in \mathbb{R}, a+bi=c+di$, 则 $a=c$ 且 $b=d$

在两个复数相等的充要条件中，注意前提条件是 a, b, c, d 是实数。若忽略前提条件，则等式不能成立。因此解决复数相等的问题时，一定要把实部和虚部分离出来，再利用复数相等的充要条件，化复数问题为实数问题

在复平面内复数与向量是一一对应的

按向量加法进行，满足平行四边形法则与三角形法则

按向量的减法进行，满足三角形法则

表示复数对应的点到原点的距离

虚数是不能比较大小的，而实数可以，这一点必须牢牢记住

$i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i$

$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0 (n \in \mathbb{Z})$

$(1 \pm i)^2 = 2i; \frac{1+i}{1-i} = i; \frac{1-i}{1+i} = -i$

$w^2=\bar{w}, \bar{w}^2=w, w^3=1$

$w^n+w^{n+1}+w^{n+2}=0 (n \in \mathbb{N}^*)$ $w = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 的性质, w 是 $x^3=1$ 的根

思维不严密 概念型错误

计算型错误

易混点

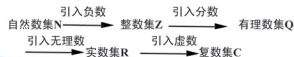
知能提升

总结升华

数系的扩充与复数引入

学法指导

数系的扩充过程



复数的概念

虚数单位 i 的规定：它的平方等于-1，即 $i^2=-1$

实数与 i 进行四则运算

复数的概念 形如 $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的数叫做复数， a, b 分别叫做复数的实部与虚部

复数相等 两个复数的实部与虚部分别相等



复平面及复数的几何意义

建立直角坐标系来表示复数的平面

模 复数 $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

向量表示 复数 $z=a+bi \leftrightarrow$ 平面向量 $\vec{OZ}=(a, b)$

对应关系 复数 $\leftrightarrow$ 复平面上的点 $\leftrightarrow$ 平面向量 $\leftrightarrow$ 复数是一一对应的

$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$
 $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i$

复数的代数运算

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ ($c+di \neq 0$)

共轭复数

定义

两个复数实部相等，虚部互为相反数

$\bar{\bar{z}}=z, z=\bar{z} \Leftrightarrow z$ 为实数， $\bar{z}=-z$ 且 $z \neq 0 \Leftrightarrow z$ 为纯虚数

性质

$z = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow |z|=1, z\bar{z}=|z|^2=\bar{z}^2=a^2+b^2$
 $\overline{\bar{z}}=z, \overline{z^y}=(\bar{z})^y$

$\overline{z_1+z_2+\dots+z_n}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\dots+\bar{z}_n, \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n}=\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n$

复数模的性质

$|z|=\bar{z}=|z|, |z_1 \cdot z_2|=|z_1| \cdot |z_2|$

$|z^n|=|z|^n, ||z_1|-|z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

$\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{vmatrix}, |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

高中数学 第五章 算法初步 第二节 算案例

先将 k 进制数写成各位上的数字与 k 的幂的乘积的形式
再按照十进制的运算规则计算出结果
先用 k 连续去除十进制数或所有的商，直到商为0为止
然后把各步得到的余数倒着写出，即为 k 进制数

先转化为十进制数
再转化为 k 进制数

计算上辗转相除法以除法为主，计算次数上辗转相除法计算次数相对较少

辗转相除法体现结果是以相除余数为0时得到，更相减损术则以减数与差相等得到

结果形式不同

秦九韶算法的关键是理解递推公式

(1)输入两个正整数 $m, n (m > n)$

(2)把 $m \div n$ 的余数赋值给 r

(3)如果 $r \neq 0$ ，那么把 n 赋值给 m ，把 r 赋值给 n ，转到第二步；否则转到第四步

(4)输出最大公约数 n

算法步骤

辗转相除法

程序框图

(1)输入两个正整数 $m, n (m > n)$

(2)若 $m \neq n$ ，则执行第(3)步，否则执行第(5)步

(3)把 $m-n$ 的差赋值给 r

(4)如果 $m > r$ ，则把 r 赋值给 m ，把 r 赋值给 n ；否则把 r 赋值给 m ，执行第(2)步

(5)输出最大公约数 n

更相减损法步骤

通过一次式的反复计算，逐步得到高次多项式的值

输入 a_i, k

第一步，输入多项式次数 n ，最高次项的系数和 k 的值

第二步，将 v 的值初始化为 a_n ，将 i 的值初始化为 $n-1$

第三步，输入 i 次项的系数 a_i

第四步， $v = vx + a_i, i = i - 1$

第五步，判断 i 是否大于或等于0，若是，则返回第三步

秦九韶算法

算法步骤

k 进制的特点



学法指导

十进制转换为非十进制

十进制数转换成 k 进制的算法：“除 k 取余法”

两个非十进制数的转化：
先将 n 进制转换成十进制，再将十进制转换成 k 进制

k 进制转换成十进制：

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0$$

学习误区

进位制转化致错

十进制转化为 k 进制

k 进制数之间的转化

识图不清晰

秦九韶算法计算多项式值时，不能正确地给所给多项式改写

辗转相除法与更相减损术的区别

知能提升

总结升华

知识梳理

思想

用较大的数除以较小的数，所得的余数和较小的数构成新的一对数

继续做上面的除法，直到大数被小数除尽

较小的数就是这两个数的最大公约数

算法步骤

- (1) 输入两个正整数 $m, n (m > n)$ 。
- (2) 把 $m \div n$ 的余数赋值给 r 。
- (3) 如果 $r \neq 0$ ，那么把 n 赋值给 m ，把 r 赋值给 n ，转到第(2)步；否则转到第(4)步。
- (4) 输出最大公约数 n 。

辗转相除法

更相减损法

来历

《九章算术》中的“更相减损术”：“可半者半之，不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也，以等数约之。”

翻译为现代语言

任意给定两个正整数，判断它们第一步是否都是偶数。若是，用2约简；若不是，执行第二步

定义

第二步以较大的数减去较小的数，接着把所得的差与较小的数比较，并以大数减小数。继续这个操作，直到所得的数相等为止，则这个数（等数）或这个数与约简的数的乘积就是所求的最大公约数

转换变形

把 n 次多项式求值问题转化为求 n 个一次多项式的值的问题

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) x + a_0 \\ &= ((a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \dots + a_2) x + a_1) x + a_0 \\ &= \dots ((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2}) x + \dots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

递推公式

$$\begin{aligned} V_0 &= a_n \\ V_k &= V_{k-1} x + a_{n-k} \quad (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

这个步骤反复执行，可用循环结构表示

概念

进位制

为了计数和运算方便而约定的计数系统

k 进制

满 k 进一

k 为基数

k 进制的特点

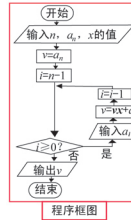
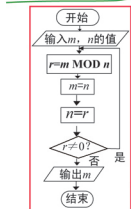
具有 k 个数字符号

由低位到高位，“逢 k 进一”

k 进制的表示

k 大于1， $k \in \mathbb{Z}$

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \quad (0 < a_n < k, 0 \leq a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 < k)$$



具有 k 个数字符号，它们是0, 1, 2, 3, ..., $(k-1)$ ，由低位到高位按“逢 k 进一”的规则进行计数

高中数学 第六章 立体几何 第一节 空间几何体的结构、三视图与直观图

围成多面体的各个多边形叫做多面体的面

两个面的公共边叫做多面体的棱

棱和棱的公共点叫做多面体的顶点

连接不在同一面上的两个顶点的线段叫做多面体的对角线

表面经过连续变形可以变成球体的多面体

简单多面体的顶点数 V 、面数 F 和棱数 E 有欧拉公式

关系式： $V+F-E=2$

定义

每个面都有相同边数的正多边形，每个顶点都有相同棱数的多面体

分类

正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体

性质

正多面体所有的棱和所有的二面角都相等，正多面体的中心到各顶点的距离相等，到各面的距离也相等

把一个多面体的任一一个面伸展成平面，如果其余的面都位于这个平面的同一侧

分类

凸多面体

凹多面体

按面数分类

一个多面体至少有四个面，多面体按照它的面数分别叫做四面体、五面体等

棱锥

棱柱

棱台

圆柱

圆锥

圆台

球

搞不清正视图、侧视图、俯视图的方向，不清楚物体由于放置的位置不同，画出的三视图可能不同

看不清简单组合体是由哪几个基本元素组成的

画三视图时不遵循“长对正，高平齐，宽相等”的原则

俯视图不能简单地理解为从上往下看图形，应理解为在物体的正前方从上往下看图形

球中一般作过球心的截面

旋转体中的轴截面

过棱柱、棱锥、棱台的两条侧棱的截面

平行于底面的截面

利用截面研究几何体，体现了空间问题平面化的思想

截面可以把几何体的性质、画法及证明、计算融为一体

正视图和侧视图都是矩形

俯视图为圆

圆柱

正视图和侧视图都是三角形

俯视图是圆和圆心

圆锥

正视图和侧视图都是等腰梯形

俯视图是两个同心圆

圆台

正视图和侧视图都是圆

球

三视图都是圆

根据三视图的形状及图中所涉及的线段长度，推断出原几何图形中的点、线、面之间的关系及图中一些线段的长度，用以解决有关问题

三视图的应用

由若干个平面多边形围成的几何体

顶点

棱

面

多面体相关定义

多面体

空间几何体的结构

知识梳理

三视图与直观图

中心投影

平行投影

三视图

直观图

相关概念

画三视图的规则

三视图的画法

常见几何体的三视图

空间几何体的直观图

已知三视图画直观图

平行投影与中心投影的区别和联系

四条原则

三个要求

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

投影

定义

性质

构成三要素

中心投影

平行投影

三视图

直观图

相关概念

画三视图的规则

三视图的画法

常见几何体的三视图

空间几何体的直观图

已知三视图画直观图

平行投影与中心投影的区别和联系

四条原则

三个要求

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

投影

定义

性质

构成三要素

中心投影

平行投影

三视图

直观图

相关概念

画三视图的规则

三视图的画法

常见几何体的三视图

空间几何体的直观图

已知三视图画直观图

平行投影与中心投影的区别和联系

四条原则

三个要求

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

投影

定义

性质

构成三要素

中心投影

平行投影

三视图

直观图

相关概念

画三视图的规则

三视图的画法

常见几何体的三视图

空间几何体的直观图

已知三视图画直观图

平行投影与中心投影的区别和联系

四条原则

三个要求

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

投影

定义

性质

构成三要素

中心投影

平行投影

三视图

直观图

相关概念

画三视图的规则

三视图的画法

常见几何体的三视图

空间几何体的直观图

已知三视图画直观图

平行投影与中心投影的区别和联系

四条原则

三个要求

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

画三视图

斜二测画法规则

学法指导

学习误区

知能提升

三视图的应用

投影

定义

性质

构成三要素

中心投影

平行投影

三视图

直观图

相关概念

画三视图的规则

三视图的画法

常见几何体的三视图

空间几何体的直观图

已知三视图画直观图

平行投影与中心投影的区别和联系

四条原则

三个要求

斜二测画法规则

学法指导

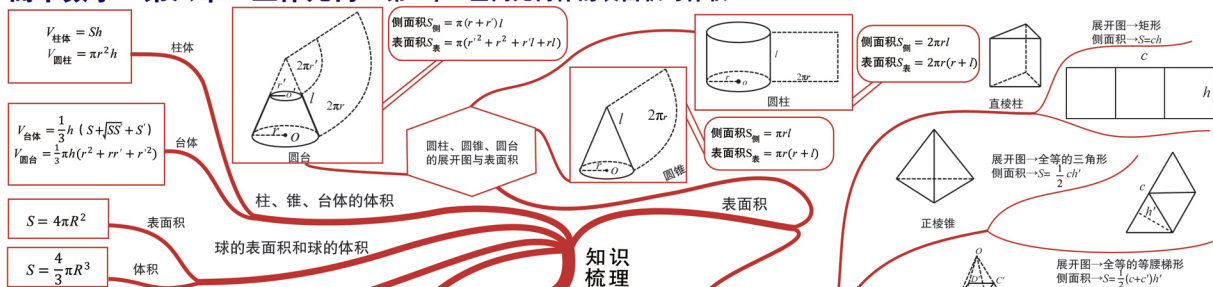
学习误区

知能提升

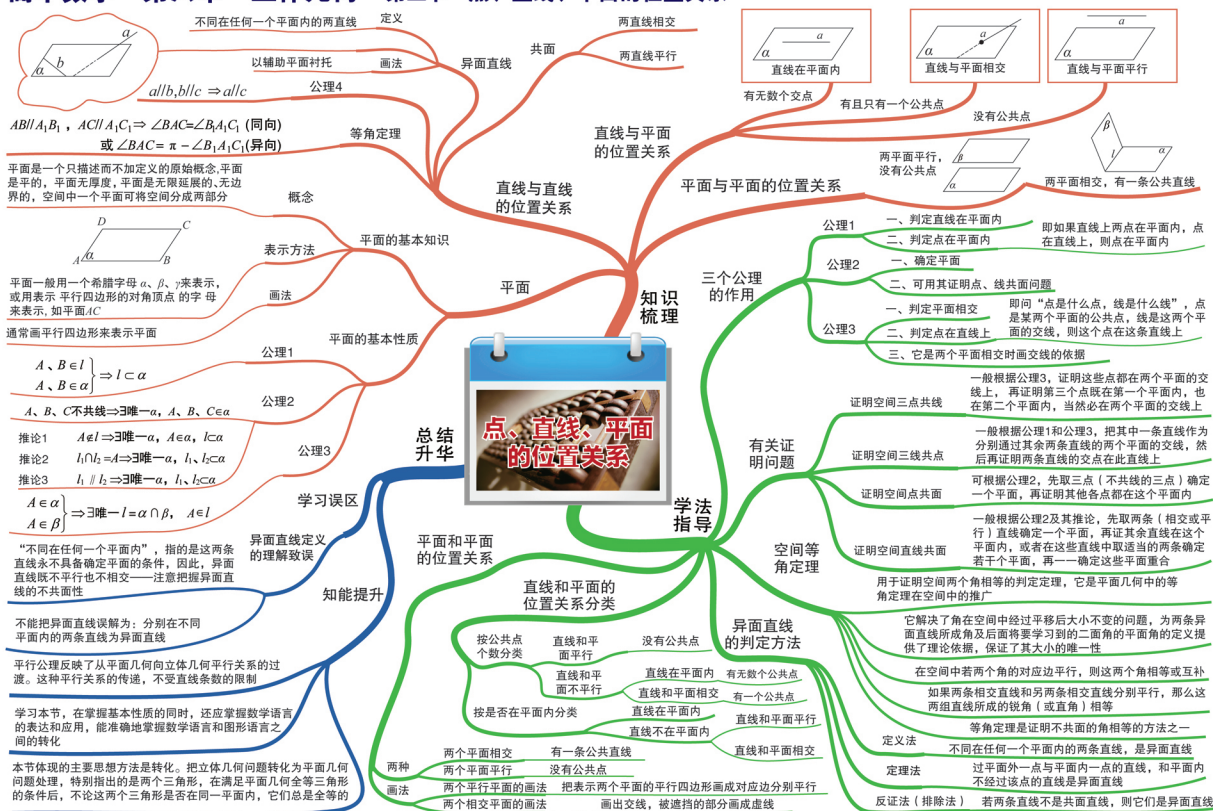
三视图的应用

画三视图

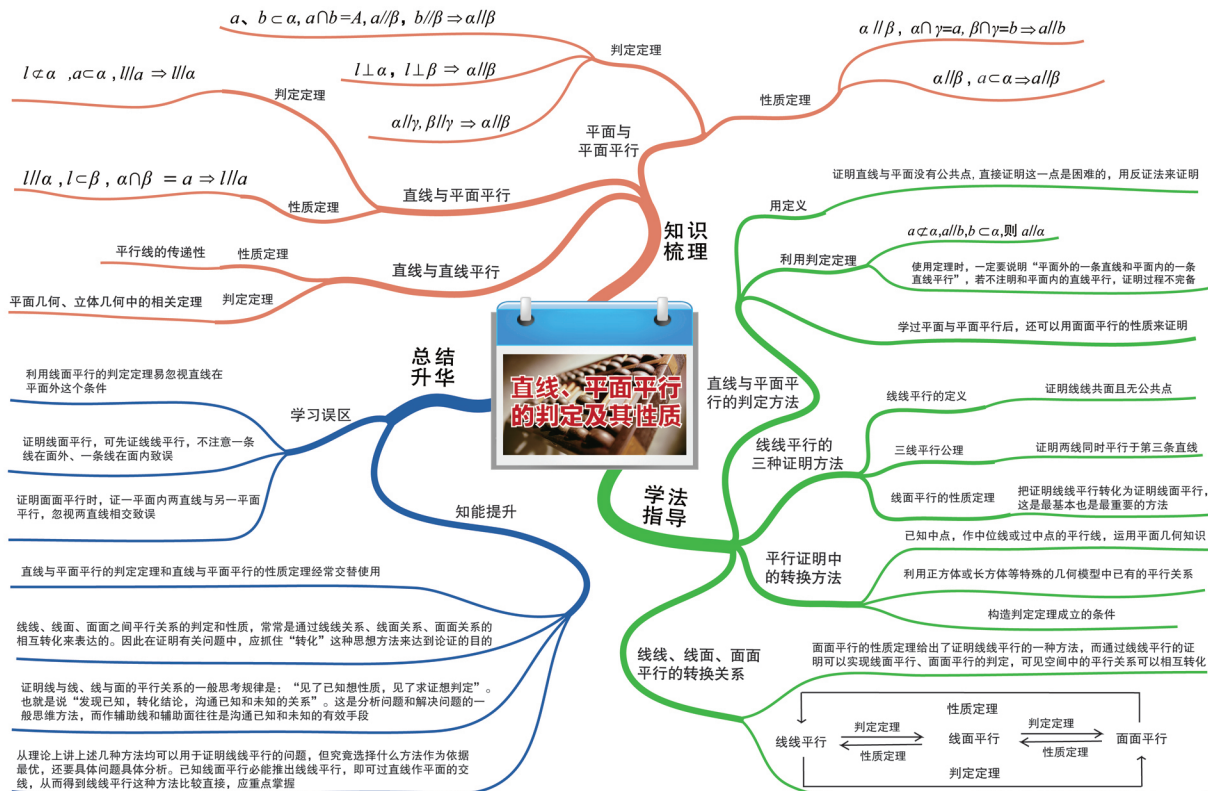
高中数学 第六章 立体几何 第二节 空间几何体的表面积与体积



高中数学 第六章 立体几何 第三节 点、直线、平面的位置关系



高中数学 第六章 立体几何 第四节 直线、平面平行的判定及其性质



高中数学 第六章 立体几何 第五节 直线、平面垂直的判定及其性质

已知两条异面直线 a, b ，过空间任意一点 O 作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$ ，把 a', b' 所成的锐角或直角称为异面直线所成的角

取值为 $[0, \frac{\pi}{2}]$

平面的一条斜线 l 和它在平面上的射影所成的锐角称为直线和平面所成的角

取值为 $[0, \frac{\pi}{2}]$

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫二面角

如图，在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上任取一点 O ，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA, OB ，则 $\angle AOB$ 叫做二面角的平面角

两个平行平面的公垂线段的长度 平行平面的距离

直线和平面平行，直线上任一点到平面的距离 点到平面的距离

过直线上一点作平面的垂线段的长度 直线和平面的距离

两条异面直线公垂线段的长度 异面直线的距离

1. 判定定理条件中的“平面内两条相交直线”是关键词，不能改为“平面内两条平行直线”或“平面内的两条直线”

2. 要判定一条已知直线和一个平面是否垂直，取决于在这个平面内能否找到两条相交的直线与已知直线垂直

立体几何中计算问题的一般步骤

(1) 作图；(2) 证明；(3) 计算

立体几何中除了用定理判定垂直，还可以通过“算”，定量地证明“直角”来达到目的

必要时注意添加辅助平面，从而构成判定定理的条件

解决与概念有关的问题时，必须牢记概念或定理的条件，同时用具体的几何模型来判断，并结合反例进行推证

定义法

转化法

等体积法

最值法

建立起两端点分别在两异面直线上的线段的函数，然后求出函数的最小值

如果两条异面直线在同一个平面内的射影是一个点及一条直线，那么这点到这条直线的垂线就是两异面直线的距离

射影法

公式法

一条直线和一个平面内任何一条直线垂直，就说直线和平面垂直

判定定理 $a \perp b, a \perp c \Rightarrow a \perp \alpha$

性质定理 $a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$

如果所成的二面角是直角，就说这两个平面互相垂直

判定定理 $\alpha \perp \beta, a \subset \alpha \Rightarrow a \perp \beta$

性质定理 $\alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha \perp \gamma$

判定定理 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, a \subset \alpha, a \perp l \Rightarrow a \perp \beta$

性质定理 $\alpha \cap \beta = l, \alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma \Rightarrow l \perp \gamma$

判定定理 $\alpha \cap \beta = a, \alpha \cap \gamma = b, \beta \cap \gamma = c \Rightarrow \begin{cases} a \perp b \\ a \perp c \\ b \perp c \end{cases}$

平面内的一条直线把平面分成两个部分，这两个部分叫做半平面

空间的角

二面角

知识梳理

判定直线垂直的常用方法

异面直线所成的角

直线和平面所成的角

关于线线角、线面角的两个结论

空间中的夹角

平面与平面所成的角

二面角的平面角的性质

利用面积投影定理

二面角的求法

范围： $[0, \pi]$

直接利用定义求（先找或作，再抓住线所在的三角形解之）

体积法

转化法：将点面距离转化为（平行）直线与平面的距离来求

点面距离

平行平面的距离

定义法

转化法

转化为线面距离、线线距离或点、点线距离等

直接利用定义求（或连，或作）某线段长为距离，然后用解三角形求解

将线面距离转化为点面距离，然后用解三角形或体积法求解

作辅助垂直平面，将线面距离转化为点线距离求解

直线与平面的距离

理解线面垂直的定义要注意

定义中的“任何一条直线”与“所有直线”是同义语

线面垂直是线面相交的一种特殊情况

定义给出了另一层含义：若直线与平面垂直，则它垂直于这个平面内的任意一条直线

两个重要结论

a. 过一点有且只有一条直线与已知平面垂直

b. 过一点有且只有一个平面与已知直线垂直

要证明一条直线垂直于平面，转化为证明直线垂直于平面内的任何一条直线

判定定理

若一条直线和一个平面内的两条相交直线垂直，则这条直线就垂直于这个平面

线面垂直的性质

两个平面垂直的性质定理

面面平行的性质定理

面面垂直的性质

向量法

证明直线的方向向量与平面的法向量平行

取值为 $[0, \frac{\pi}{2}]$

常用“平移线段法”，求法：平移的方法一般下面三种类型

a. 利用图中已有的平行线平移

b. 利用特殊点（线段的端点或中点）作平行线平移

c. 补形平移，计算异面直线所成的角，通常放在三角形中进行

定义包括三种情况

a. 斜线和平面所成的角

b. 垂线和平面所成的角

c. 与平面平行或在平面内的直线与平面所成的角

取值为 $[0, \frac{\pi}{2}]$

求法

作出斜线在平面内的射影，找到线面所成角，转化为解三角形的题

(1) 已知 PA 与 PB 分别是平面 α 的垂线和斜线，在平面 α 内过斜足 B 任意引一直线 BC ，设 $\angle PBA = \theta_1, \angle ABC = \theta_2, \angle PBC = \theta$ ，则有 $\cos \theta = \cos \theta_1 \cos \theta_2$ ；

(2) 经过一个角的顶点作这个角所在平面的斜线，如果斜线和这个角两边的夹角相等，那么斜线在平面内的射影是这个角的平分线所在的直线

二面角的棱垂直于它的平面角所在的平面

从二面角的平面角的一边上任一点（异于角的顶点）作另一面的垂线，垂足必在平面角的另一边（或其反向延长线）上

二面角的平面角所在的面与二面角的两个面都垂直

利用面积投影定理 $\cos \alpha = \frac{S'}{S}$ 求

其中 S 为二面角一个平面内图形的面积， S' 是这个平面图形在另一个平面内投影图形的面积， α 为二面角的大小

利用异面直线上两点的距离公式求

设 $AE \subset \alpha, A'F \subset \beta, AE \perp AA', A'F \perp AA'$ ，则 EF 可求时，由公式 $EF^2 = m^2 + n^2 + d^2 - 2mn \cos \theta$ 就可解出 θ

利用两平面互相垂直的性质：若已知点在已知平面的垂面上，则已知点到两平面交线的距离就是所求的点面距离

转化法：将点面距离转化为（平行）直线与平面的距离来求



直线、平面垂直的判定及其性质

学习误区

总结

学法指导

知识提升

空间距离的常用求法

点面距离

平行平面的距离

定义法

转化法

转化为线面距离、线线距离或点、点线距离等

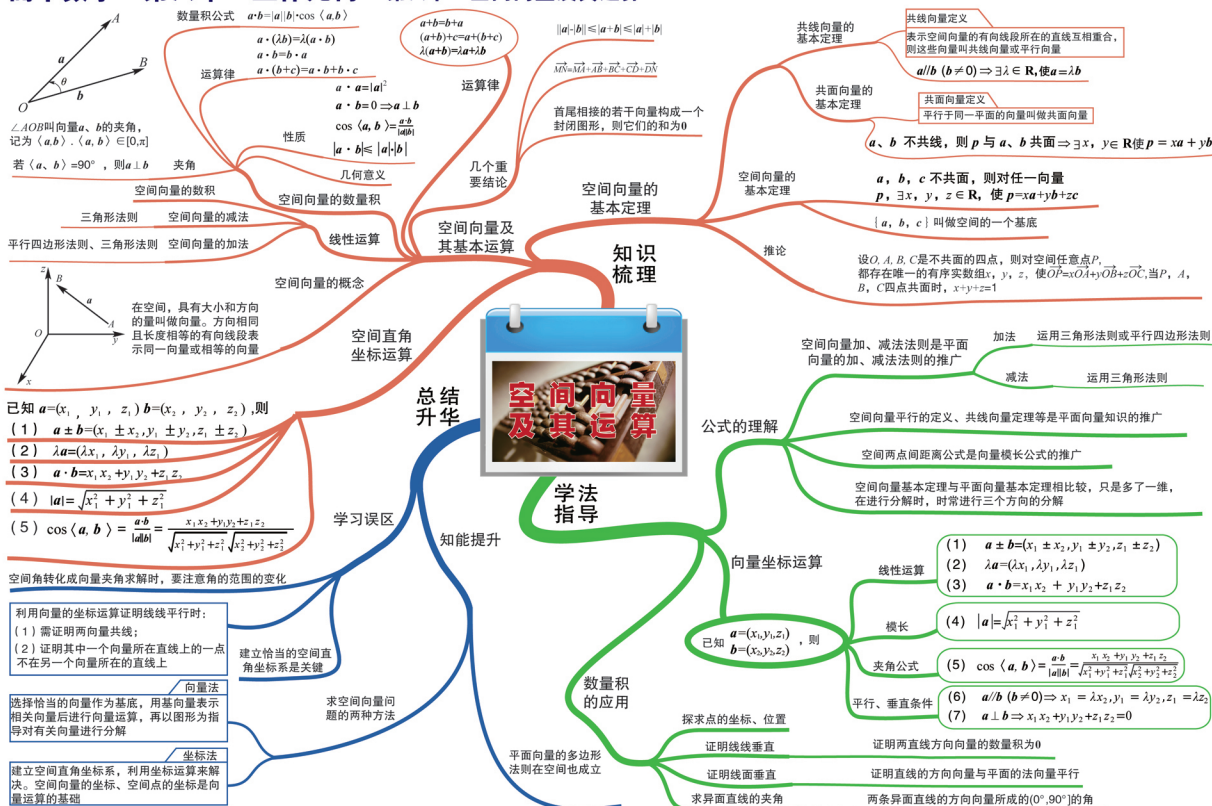
直接利用定义求（或连，或作）某线段长为距离，然后用解三角形求解

将线面距离转化为点面距离，然后用解三角形或体积法求解

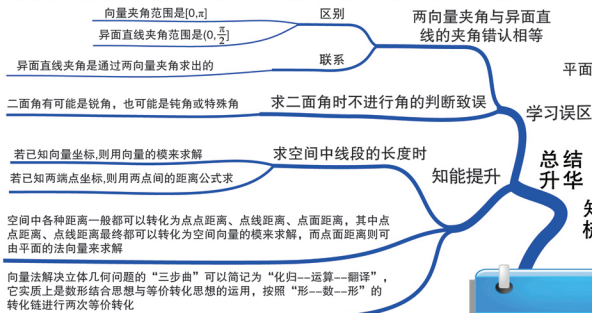
作辅助垂直平面，将线面距离转化为点线距离求解

直线与平面的距离

高中数学 第六章 立体几何 第六节 空间向量及其运算

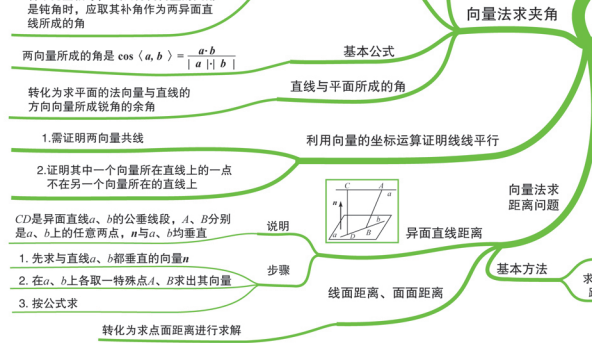


高中数学 第六章 立体几何 第七节 立体几何中的向量方法



立体几何中的向量方法

学法指导



高中数学 第七章 数列 第一节 数列的概念与简单表示法

1. 分式形式的数列，分子、分母分别找通项，要充分借助分子和分母的关系

2. 符号用 $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n+1}$ 来调节，因为 n 和 $n+1$ 奇偶交错

3. 对于比较复杂的通项公式，要借助于等差数列、等比数列和其他方法来解决

4. 写通项虽无固定模式，但也有规律可循，主要靠观察（观察规律）、比较（比较已知的数列）、归纳、转化（转化为等差或等比数列）等方法

已知数列的前几项，写出数列的一个通项公式，主要从以下几个方面来考虑

写数列一个通项公式的方法

知能提升

复杂的数列一般都是由简单的数列组成的，因此要把基本的等差、等比数列掌握好

数列是特殊的函数，特殊在定义域是自然数集或由1为首数的有限个连续自然数组成的集合。其图像是无限个或有限个孤立的点

求最小项 a_n ，则 a_n 满足 $\begin{cases} a_n \leq a_{n-1} \\ a_n \leq a_{n+1} \end{cases}$

求最大项 a_n ，则 a_n 满足 $\begin{cases} a_n \geq a_{n-1} \\ a_n \geq a_{n+1} \end{cases}$

数列的单调性体现在图像上是一群孤立的点（从左到右是向上或向下的）

数列最大项、最小项、数列有界性问题均可借助数列的单调性来解决

四种方法灵活运用

- (1) 求差法
- (2) 求商法
- (3) 函数图象法
- (4) 函数单调性法

判断单调性的常用方法

总结升华

a_n 与 $\{a_n\}$ 的区别： a_n 表示数列的第 n 项， $\{a_n\}$ 表示数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$

顺序对于数列来讲十分重要，有几个不同的数，由于它们的排列顺序不同，构成的数列就不是同一数列，显然数列与数集有本质区别

不是所有的数列都有通项公式；有通项公式的数列，其表达式也不唯一

数列的项与项数是不同的概念，数列的项是指这个数列中的某一个确定的数，即 (n) ，而项数是指这个数在数列中的位置序号

数列的单调性要与函数的单调性区别开来，数列的单调性只需比较相邻两项的大小。摆动数列与常数列认为不具有单调性



学法指导

最大项与最小项的求法

数列单调性

通项公式求法

知识梳理

数列的定义

按照一定的顺序排列的一列数叫做数列，数列中的每一个数叫做数列的项，记作 a_n

数列的分类

- 按项数多少
 - 项数有限的数列叫有穷数列
 - 项数无限的数列叫无穷数列
- 按项的大小
 - 有界数列
 - 无界数列
- 按项的增减性
 - 递增数列 $n \geq 2, a_{n-1} < a_n$
 - 递减数列 $n \geq 2, a_{n-1} > a_n$
 - 常数列 各项均相等的数列
 - 摆动数列 第二项起有小于前面或不小于前面的项

数列的表示方法

- 列举法 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ，简记为 $\{a_n\}$
- 图象法 数列的图像是一些孤立的点
- 解析法 用通项公式表示
- 递推法 用递推公式表示

通项有关公式

- 通项公式 数列的第 n 项 a_n 与项数 n 的关系可以用一个公式来表示
- a_n 与 S_n
$$a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$
- 前 n 项和 指的是 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ，记作 S_n
- 递推公式 已知数列 $\{a_n\}$ 的第1项（或前几项），且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} （或前几项）间的关系可以用一个公式表示，此公式叫递推公式

求通项时要看清已知条件

由 S_n 求 a_n 时，要分 $n=1$ 和 $n \geq 2$ 两种情况

已知数列前几项，求一个通项公式，先观察各项的特点，然后归纳出其通项公式，要注意项与项数的关系及项与前后项的关系

由递推公式求通项

高中数学 第七章 数列 第二节 等差数列

$a_n = g(n), S_n = f(n)$
的图像均是对应函数图像上一群孤立的点

利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 时要注意 $n \geq 2$, 在求出 a_n 时, 要验证 $n=1$ 时是否成立, 否则要表示为分段函数 $a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$

$S_n = An^2 + Bn$ ($A, B \in \mathbb{R}$) 前 n 项和法
 $a_n = An + B$ ($A, B \in \mathbb{R}$) 通项公式法
 $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ ($n \geq 2$) 等差中项法
 $a_n - a_{n-1} = d$ ($n \geq 2$) 定义法

若 S_n 是等差数列 a_n 的前 n 项和, 则 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 也是等差数列

项数为 $2n-1$
 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n, S_{奇} - S_{偶} = a_n, \frac{S_{奇}}{S_{偶}} = \frac{n}{n-1}$ (a_n 是中间项, $a_n \neq 0$)

项数为 $2n$
 $S_{2n} = n(a_1 + a_{2n}) = n(a_2 + a_{2n-1}) = \dots = n(a_n + a_{n+1})$
 $S_{偶} - S_{奇} = nd, \frac{S_{偶}}{S_{奇}} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ (a_n 与 a_{n+1} 是中间两项, $a_{n-1} \neq 0$)

等差数列中依次 k 项的和成等差数列
即 $S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, S_{4k} - S_{3k}, \dots$ 成等差数列, 公差为 k^2d

若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是等差数列, 则 $\{ma_n + kb_n\}$ 也是等差数列

若 $m+n=p+q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$

若 s_n, T_n 分别是等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和, 则 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$

知能提升

形如 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = pa_n + q \end{cases}$ ($p, q \neq 0$) 递推公式求通项 a

变形: $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{q}{p^{n+1}}$ 化为 $b_{n+1} = b_n + g(n)$ 求解

总结
升华

知识梳理



学法指导

判定
方法

等差
数列
性质

定义

$a_{n+1} - a_n = d, n \in \mathbb{N}^*$ 或 $a_n - a_{n-1} = d, n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$

一个数列从第二项起, 每一项与它的前一项的差都等于同一个常数, 这个数列就叫做等差数列, 这个常数叫做这个等差数列的公差, 用 d 表示

推导

累加法

归纳法

通项公式

公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n = a_m + (n-m)d$

推广变形

$d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$

等差中项

如果三个数 a, A, b 成等差数列, 把 A 叫做 a 与 b 的等差中项

单调性

$d > 0$ 为递增数列; $d < 0$ 为递减数列; $d = 0$ 为常数列

前 n 项和公式

推导: 倒序相加法

$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

对称性设未知数

三个数成等差数列, 设为 $a-d, a, a+d$

四个数成等差数列, 设为 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$

等差数列基本量

a_1, n, d, S_n, a_n 一般情况下可以知三求二

通项公式表示

$a_n = a_m + (n-m)d = pn + q$

累加法求通项

若 $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + f(n)$
则 $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1$

$= f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(1) + a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + a_1$

高中数学 第七章 数列 第三节 等比数列

$a_n = g(n), S_n = f(n)$ 的图像均是
对应函数图像上一群孤立的点

注意函数与数列的异同点

形如 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = pa_n + q \end{cases}$ (p, q 为非零常数)
递推公式求通项

将 $a_{n+1} = pa_n + q$ 与 $a_n = pa_{n-1} + q$ 相减得:

$a_{n+1} - a_n = p(a_n - a_{n-1})$ 得

$\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列, 求 a_n

等比数列求和分 $q=1$ 和 $q \neq 1$ 这两种情况来考虑

证明数列是等比数列, 除了 $a_{n+1} = a_n q (q \neq 0)$, 还须 $a_1 \neq 0$

等比数列中项公式 $G = \pm \sqrt{ab}$, 要注意数列中项的关系

等比数列中有五个量 a_1, n, q, a_n, S_n , 一般知三求二

若三个数成等比数列则可以设为 $\frac{a}{q}, a, aq$

若四个数成等比数列则可以设为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3 (q \in \mathbb{C})$

$a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ 数列的 a_n 与 S_n 的关系

$S_{n+1} - qS_n = a_1$

$S_n - qS_{n-1} = a_1 - qa_1$

错位相减法求和

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n), \frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1), \dots, \frac{a_2}{a_1} = f(1),$
则 $a_{n+1} = a_1 f(1) f(2) \dots f(n)$

累乘法求通项

建数列模型解应用题时, 注意涉及的量是 a_n 还是 S_n ,
项数 n 是多少, 是等比数列还是等差数列, 求 a_n 还是 S_n , 不能正确区分致误

学习误区
求通项不验证首项是否为0
特殊值不验证致误
求和时, 不验证 $q=1$ 的情况

注意 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $\{c^{a_n}\} (c > 0)$ 是等比数列

总结升华

知识梳理



学法指导

公式应用

等比数列中的
设项技巧

重要方法

定义

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (q \neq 0, n \in \mathbb{N}^+)$$

如果一个数列从第二项起, 每一项与它的前一项的比都等于同一个常数, 这个数列就叫做等比数列, 这个常数叫做这个等比数列的公比, 用 q 表示

通项公式

通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

推导

归纳法 数学归纳法最常用

累加法 可用累加法求通项

如果 G 是 a 与 b 的等比中项, 则 $G^2 = ab$

等比中项

前 n 项和公式

$$S_n = \begin{cases} na_1, & q=1 \\ a_1(1-q^n), & q \neq 1 \end{cases} = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}, q \neq 1$$

推导

错位相减法

3, 4 只能作判断, 不能作证明

判定方法

1. 等比中项法

$$a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+)$$

2. 定义法

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (q \neq 0, n \in \mathbb{N}^+)$$

3. 通项法

$$a_n = cq^n \quad (c \neq 0, q \neq 0, n \in \mathbb{N}^+)$$

4. 前 n 项和法

$$S_n = c - cq^n \quad (c \neq 0, q \neq 0, n \in \mathbb{N}^+)$$

注意 $q \neq 1$
判定等比数列时
灵活掌握几种方法

常用性质

对于等比数列 $\{a_n\}$ 的任意两项 a_n, a_m , 有 $a_n = a_m q^{n-m}$

对于等比数列 $\{a_n\}$, 若 $m+n=p+q$, 则 $a_m a_n = a_p a_q$

对于等比数列 $\{a_n\}$, S_n 是其前 n 项和, $k \in \mathbb{N}^+$
则 $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}$ 成等比数列

既是等差数列, 又是等比数列的, 必是各项不为零的常数列

高中数学 第七章 数列 第四节 数列的求和与综合应用

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+k}} = \frac{1}{k}(\sqrt{n+k} - \sqrt{n})$$

(k 为常数, $k \in \mathbb{N}^+$)

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$$

观察数列的特点和规律, 在分析数列通项的基础上求和, 或者拆分为基本数列之后再求和, 或转化为基本函数求和

数列是一种特殊的函数, 运用函数与方程的思想, 构造辅助函数解决数列综合问题

知能提升

应用题应分析属于实际应用的哪种类型, 然后代入相应公式

学习误区

S_n 和 a_n 的关系不分清 $n=1$ 和 $n>1$ 两种情况致误

直接应用公式求和时, 不注意公式的适用范围和推导过程致误

不注意数列是特殊的函数致误

裂项求和不考虑消项的规律致误

总结升华

知识梳理

数列的求和与综合应用

数列求和

- 直接求和 等差数列和等比数列均可直接求和
- 分组求和 将数列拆成两个可以直接求和的数列
- 并项求和 将数列中的项先合并, 后直接求和
- 裂项求和 将数列先分裂成两项或多项, 再求和
- 错位相减 错位相减法是常用的一种方法
- 倒序相加 将数列的项倒写, 然后相加
- 降次求和 利用公式将次数降低, 然后求和

数列的综合应用

- 存在性问题
- 最值问题
- 实际问题

$$2^n \geq C_n^0 + C_n^1 = n + 1$$
$$2^n \geq C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = \frac{n^2 + n + 2}{2} (n \geq 2)$$
$$2^n \geq n(n-1) (n \geq 2)$$
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$
$$\frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m} (b > a > 0, m > 0)$$
$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{n+k} \right) (0 < k < n)$$
$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{n} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

证数列不等式常用技巧

仔细观察问题的特征, 然后选用不同的技巧

实际应用

学法指导

银行储蓄单利计算本金为 a , 每期利率为 p , 存期为 n , 本利和为 $a(1+pn)$

银行储蓄复利计算: 本金为 a , 每期利率为 p , 存期为 n , 本利和为 $a(1+p)^n$

产值模型: 产值基数 a , 平均增长率为 p , 时间 x 的总产值 $a(1+p)^x$

分期付款模型: a 为付款总额, p 年利率, 分 n 次还款,

x 为等额还款数, x 应为
$$\frac{p(1+p)^n a}{(1+p)^n - 1}$$

数列综合问题策略

构造等差、等比数列模型

运用相关概念、性质及求和公式进行计算

通过归纳—猜想—证明方法探索规律

等价转化与分类讨论法的应用

数列的综合问题是比较困难的题型, 做题时仔细观察, 选择最适合的办法

数列求和常用方法

错位相减法

数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比是 q , 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和可通过 $S_n - qS_n$ 求得的方法

等差数列求和公式法

等比数列求和公式法

公式法

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

递推求和

先求通项, 再求和

高中数学 第八章 不等式 第一节 不等式的概念、性质及解法

不等式的性质是否具有可逆性把握不准确

同解变形中出现增根、减根的情况致误

解含参数不等式时出现分类讨论时，分类标准不准确，有遗漏致误

分式化整式

高次化一次

无理化有理

核心是同解变形

方法

不等式解法

知能提升

掌握比较法，判别式法，综合法，分析法，反证法 常用方法

不等式证明

常用基本不等式

常用的放缩方法

常用技巧

求差法：作差→变形→判断差的符号→结论

求商法：作商→变形→判断商与1的大小→结论

步骤

求差法关键是“变形”，向以下方面转化：1.因式分解；2.配成完全平方；3.凑成恒正或恒负的代数式

若 $\frac{a}{b} > 1$ 且 $b > 0$ ，则 $A > B$

若 $\frac{a}{b} > 1$ 且 $b < 0$ ，则 $A < B$

求商法关键：

“商与1的大小比较”

不等式的证明方法主要有：

比较法、综合法、分析法

求差法与求商法

学指
指导

序轴标根法：化正、求根、标根、穿根（注意奇穿偶偶）
写集（注意端点值能否取到）

一元高次不等式的解法

不等式左最高次数
系数为正，右为0

化正

$a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_n)^{k_n} > 0$

$x_1 > x_2 > \cdots > x_n$, k_i 为 x_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的重数

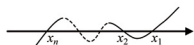
求根

变形

数轴上标出各根，从右上开始穿根，奇重根穿过，偶重根不穿过

标根

穿根



写解集

注意端点值能否取到

不等式的 概念、性质及解法

总结
升华

知识
梳理

比较实数的大小

依据

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$$

$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$$

$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$$

方法

求差法，求商法

不等式的性质

1. 对称性 $a>b \Leftrightarrow b<a$

2. 传递性 $a>b, b>c \Rightarrow a>c$

$a>b, b>c \Rightarrow a+b>b+c$

3. 可加性 $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$

4. 可乘性 $a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$

$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$

5. 乘方法则 $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$ ($n \in \mathbb{N}$ 且 $n>1$)

6. 开方法则 $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n \in \mathbb{N}$ 且 $n>1$)

不等式的解法

解有理不等式

一元一次不等式的解法

一元二次不等式的解法

一元高次不等式的解法

分式不等式的解法

不等式的证明

1. 比较法

① 求差法

欲证 $A>B$ ，只需证 $A-B>0$

步骤：作差→变形→判断符号

变形：变为因式的积或平方的形式。

② 求商法

欲证 $A/B(B>0)$ ，只需证 $A/B>1$

步骤：作商→变形→判断商与1的大小

适用范围：适用两端式子为乘积或幂、指数的形式

2. 综合法

③ 求平方差法

3. 分析法

从已知出发，借助不等式的性质和有关定理，经过逐步逻辑推理，最后推出要证的不等式

从需证的不等式出发，寻找这个不等式成立的充分条件，逐步转化到已知条件或明显事实

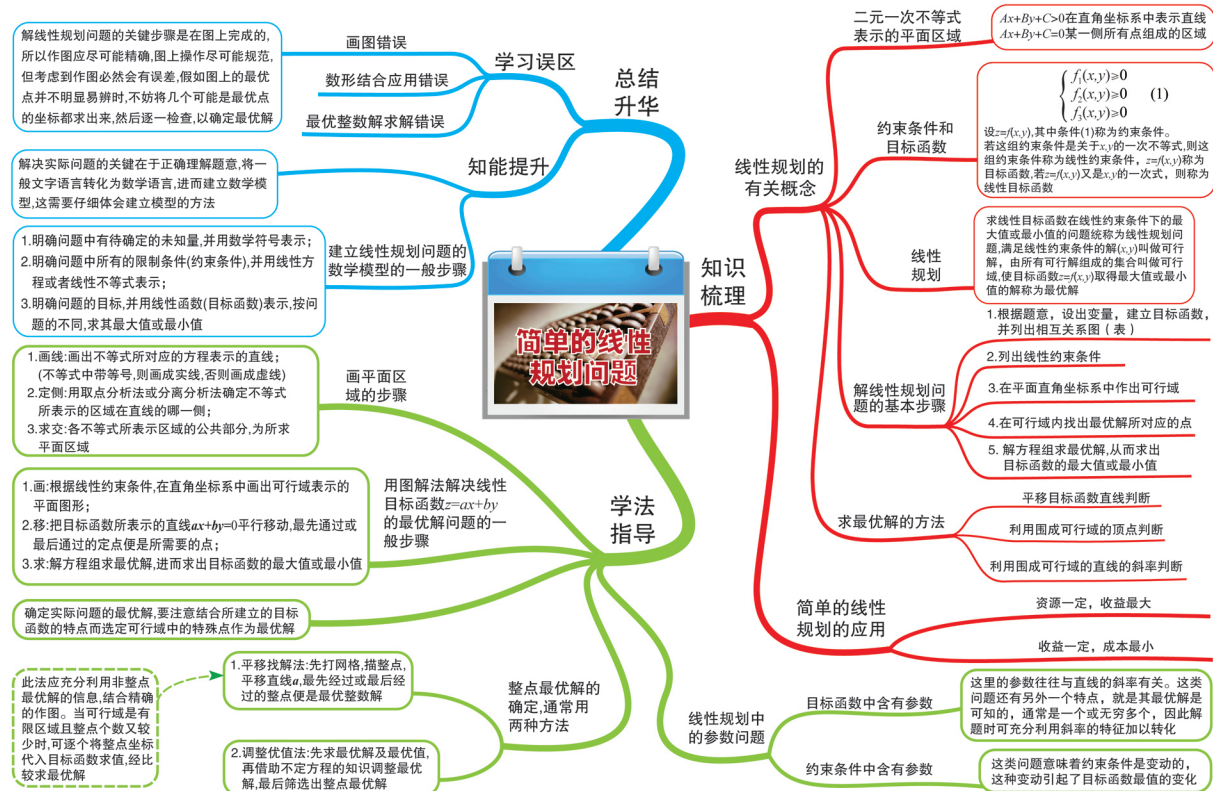
一元二次不等式的解法

类型	求解方法
$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$	(1) 与 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 同解 (2) 与 $f(x)g(x) > 0$ 同解
$\frac{f(x)}{g(x)} < 0$	(1) 与 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ 同解 (2) 与 $f(x)g(x) < 0$ 同解
$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ (≤ 0)	与 $\begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 \text{ (或 } \leq 0) \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ 同解
$\frac{f(x)}{g(x)} > a$ ($a \neq 0$)	化为 $\frac{f(x)-ag(x)}{g(x)} > 0$ ，依上法求解

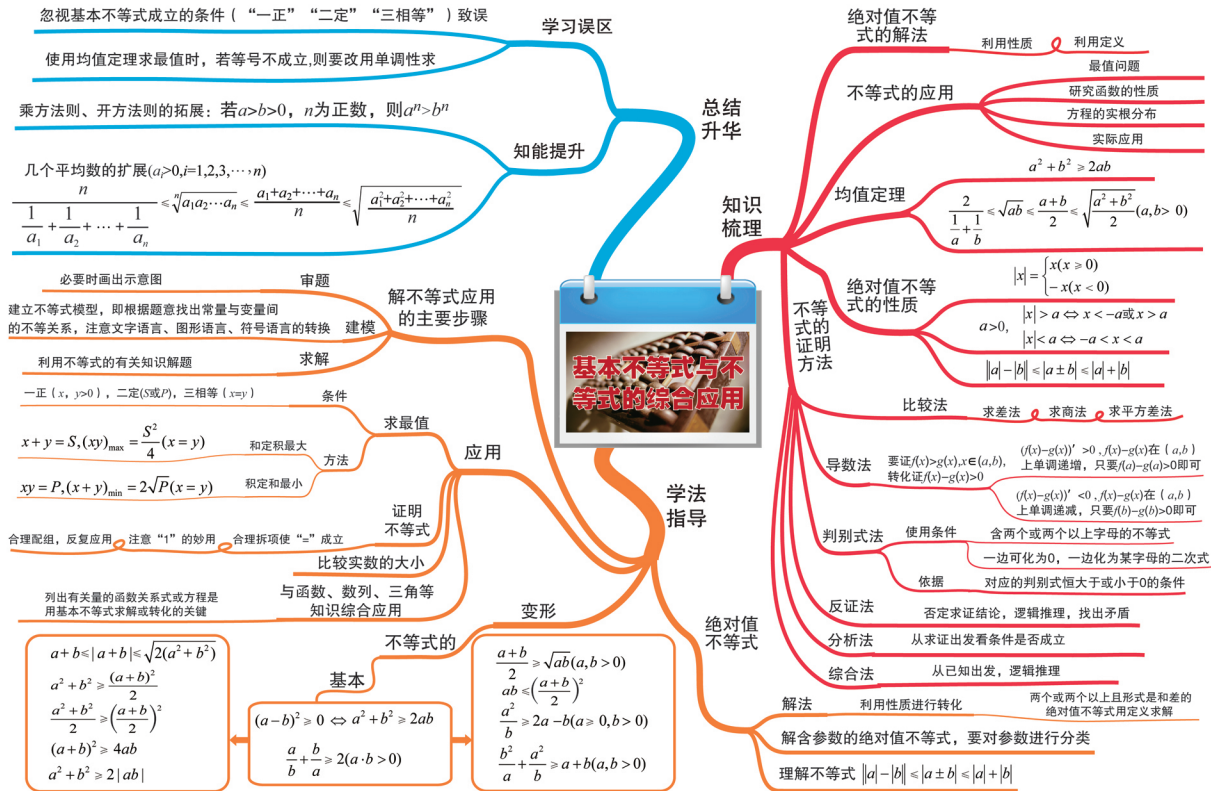
变形	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
计算 $\Delta = b^2 - 4ac$			
作 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像			
求 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根	不等实数 x_1, x_2	相等实根 $x_1 = x_2$	无实根
求出解集：大于取两边，小于取中间	$\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x \mid x \neq x_1\}$	$\mathbb{R}$
	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

分式不等式的解法

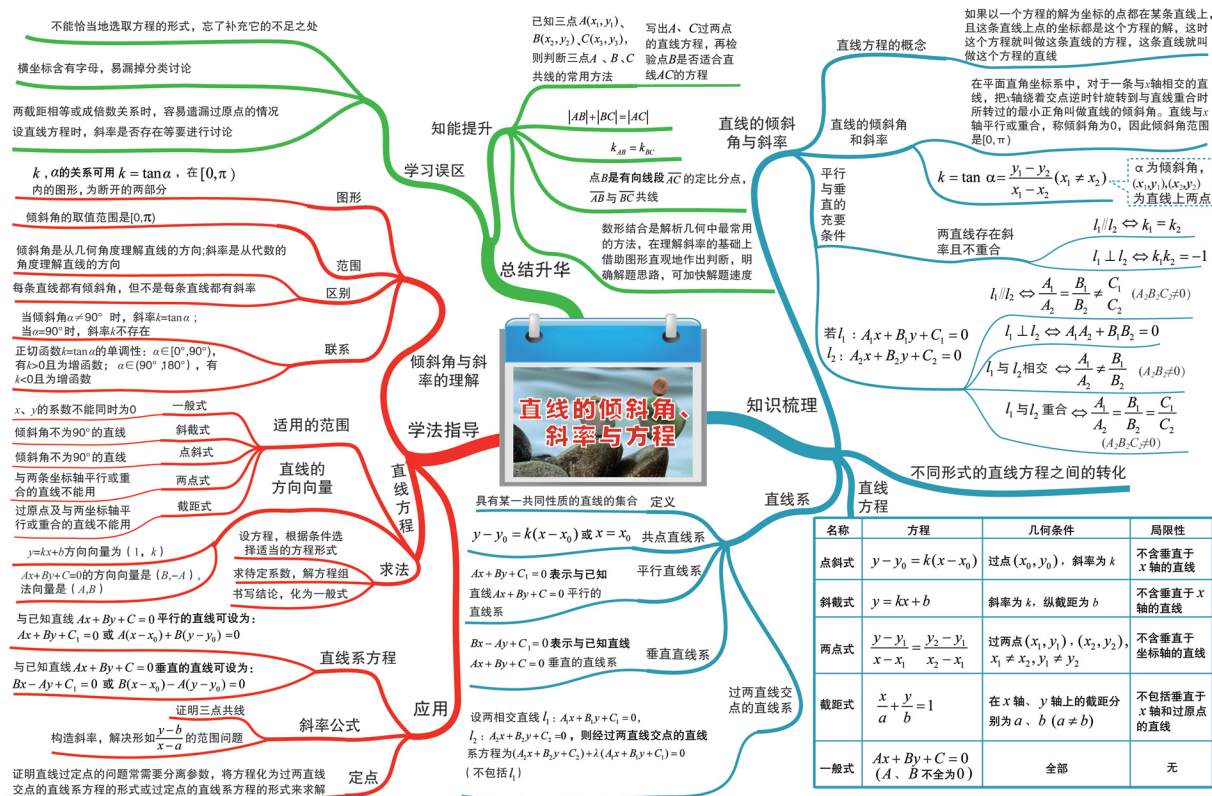
高中数学 第八章 不等式 第二节 简单的线性规划问题



高中数学 第八章 不等式 第三节 基本不等式与不等式的综合应用



高中数学 第九章 直线与方程 第一节 直线的倾斜角、斜率与方程



高中数学 第九章 直线与方程 第二节 直线的交点坐标与距离公式

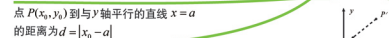
对称思想是数学中比较活跃的思想之一。它主要分为中心对称和轴对称两种。解对称问题要把握对称的实质：两对称点的中心为对称中心；两对称点的连线被对称轴垂直平分

点 $P(x_0, y_0)$ 到 x 轴的距离为 $d = |y_0|$

点 $P(x_0, y_0)$ 到 y 轴的距离为 $d = |x_0|$

点 $P(x_0, y_0)$ 到与 x 轴平行的直线 $y = b$ 的距离为 $d = |y_0 - b|$

点 $P(x_0, y_0)$ 到与 y 轴平行的直线 $x = a$ 的距离为 $d = |x_0 - a|$



点 $P(x_0, y_0)$ 关于点 $M(x_0, y_0)$ 的对称点坐标是 $(2x_0 - x_0, 2y_0 - y_0)$

直线 $Ax + By + C = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$

关于点 $P(x_0, y_0)$ 对称的直线方程是

$A(2x_0 - x) + B(2y_0 - y) + C = 0$ 或

$Ax + By - (2Ax_0 + 2By_0 + C) = 0$

方法：线关于点对称转化为点关于点对称

求点 P 关于直线 l 的对称点 Q

联立求 Q

求直线 a 关于 l 的对称直线 b

1. 在直线 a 上取点 A , 求 A 关于 l 的对称点 B

2. 求出 a 与 l 的交点

3. 用两点式写出 b 的方程

方法一

利用 a 到 l / 到 b 的夹角相等, 即到角公式

方法二

利用角平分线 l 上的点到角两边的距离相等。即到直线的距离公式

方法三

两平行线间的距离

两直线方程分别为: $y = kx + b_1, y = kx + b_2$

则两平行线间的距离为 $d = \frac{|b_1 - b_2|}{\sqrt{1 + k^2}}$

位置关系理解

一直线的斜率为 0, 另一直线的斜率不存在

两直线的斜率都存在且斜率之积为 -1

两直线垂直

交点是两相交直线的唯一公共点

两条直线相交

两条直线重合即两直线方程系数对应成比例

两条直线重合

斜率都存在且相等

斜率都不存在

两条直线平行

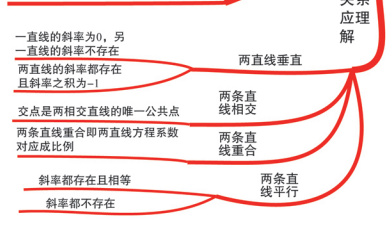
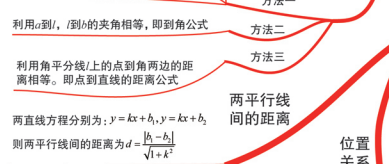
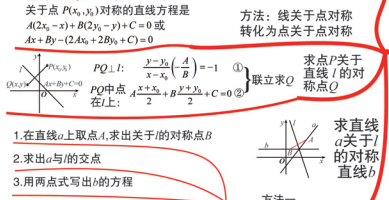
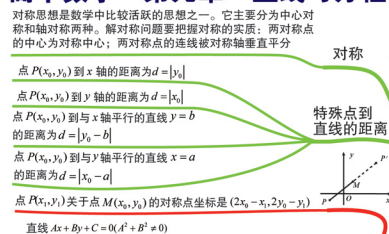
两条直线重合

两条直线平行

两条直线重合

两条直线平行

两条直线重合



忽视直线的存在性和两条直线重合的情形

解题中出现不合实际情况的答案

点到直线的距离公式, 涉及绝对值、直线的垂直、最小值等基本知识, 易错漏

学习误区

两条直线之间的位置关系

能提升

总结升华

对称问题的求法

学法指导

知识梳理

到角与夹角

距离公式

两直线的交点

对称问题

点关于直线对称

直线关于直线对称

位置关系理解

两直线垂直

两直线相交

两直线重合

两直线平行

两直线重合

两直线平行

两直线重合

两直线平行

两直线重合

两直线平行

两直线重合

两直线平行

两直线重合

两直线平行

两直线重合

两直线平行

两直线重合

两直线平行

两直线重合

两直线平行

两直线重合

两直线平行

两直线重合

两直线平行

两直线重合

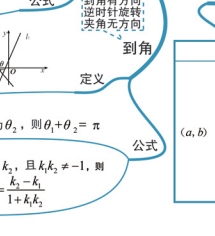
两直线平行

两直线重合

两直线平行

两直线重合

两直线平行



直线关系	$l_1: y = k_1x + b_1$ $l_2: y = k_2x + b_2$	$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$	对应方程组
平行	$k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$	$A_1B_2 = A_2B_1$ 且 $A_1C_2 \neq A_2C_1$	无解
垂直	$k_1k_2 = -1$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	一解
相交	$k_1 \neq k_2$	$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$	一解
重合	$k_1 = k_2$ 且 $b_1 = b_2$	$A_1B_2 = A_2B_1$ 且 $A_1C_2 = A_2C_1$	无数解

两直线的交点	两条直线方程组成的方程组有唯一实数解
两点之间的距离	设点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 则 $ P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
点到直线的距离	点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离 $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$
两平行直线的距离	两平行线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 与 $l_2: Ax + By + C_2 = 0 (C_1 \neq C_2)$ 之间的距离 $d = \frac{ C_1 - C_2 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$

对称问题	点关于直线对称	直线关于直线对称
点关于轴对称	x 轴 $(a, -b)$ y 轴 $(-a, b)$ $x+y+c=0$ $(-b-c, -a-c)$ $y=x$ (b, a) $y=-x$ $(-b, -a)$ $x=m$ $(2m-a, b)$ $y=n$ $(a, 2n-b)$	原直线 $f(x, y) = 0$
对称点坐标	$(a, -b)$ $(-a, b)$ $(-b-c, -a-c)$ (b, a) $(-b, -a)$ $(2m-a, b)$ $(a, 2n-b)$	对称轴 x 轴 $f(x, -y) = 0$ y 轴 $f(-x, y) = 0$ $x+y+c=0$ $f(-y-c, -x-c) = 0$ $y=x$ $f(y, x) = 0$ $y=-x$ $f(-y, -x) = 0$ $x=m$ $f(2m-x, y) = 0$ $y=n$ $f(x, 2n-y) = 0$

到角	定义	公式
到角	到角有方向, 逆时针旋转, 夹角无方向	$\theta = \arctan \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$
夹角	若两直线垂直, 称其夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 若两直线不垂直, 夹角范围为 $(0, \frac{\pi}{2}]$	$\theta = \arctan \frac{ k_2 - k_1 }{1 + k_1k_2}$

高中数学 第十章 圆与方程 第一节 圆的方程

1.形如 $u = \frac{y-b}{x-a}$ 形式的值问题,可转化为
动直线斜率的最值问题

形如 $mx+ny$ 形式的值问题,可转化为
动直线截距的最值问题

3.形如 $(x-a)^2 + (y-b)^2$ 的最值问题,可
转化为动点到定点距离的最值问题

4.对于圆的最值问题,往往利用圆的参数
方程将动点坐标设为 $(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$,减少变量的个
数建立三角函数式,利用正弦函数的有界性求最值

利用圆的定义,并结合两点间的距离
公式建立方程组求解

研究圆的几何性质,求得圆的基本量
(圆心坐标、半径),从而求出方程

选择适当方程形式——圆的标准方程或一般方程

列出关于 a, b, r 或 D, E, F 的方程组

解出 a, b, r 或 D, E, F 的对应值,代入圆的方程

过两圆: $C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0, C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$
交点的圆: $x^2+y^2+D_3x+E_3y+F_3=0$ (其中 $D_3=D_1+\lambda D_2, E_3=E_1+\lambda E_2, F_3=F_1+\lambda F_2$)
($\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1$, 该方程不包括 C_2)

过圆 $C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 和直线 $L: Ax+By+C=0$ 的交点的
圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \lambda$ 为参数)

若能据已知条件找出圆心坐标和半径,则直接写出圆的标准方程;
否则,可通过圆的标准方程或一般方程用待定系数法求解

圆的标准方程和一般方程都有三个参变量,
因此具备三个独立的条件才能确定

解答圆的相关问题时,要注意数形结合,
充分利用圆的几何特性以简化运算过程

利用参数式可降低运算量,将圆的参数方程化为普通方程,
只需要利用同角的三角函数的平方关系将参数消去即可

注意:消去参数后,相应的取值范围不能扩大,也不能缩小

直接由题目提供的条件列出方程

根据圆、直线等定义列方程

利用圆与圆的几何性质列方程

找到所求点与已知点的关系,代
入已知点满足的关系,此外还有
交轨法、参数法等

最值问题

圆的方程
的主要求法

1.定义法

2.几何法

3.待定
系数法

4.圆系方程

求圆的方程
的基本思路

圆的参数方程突
出了“角”的特点

利用圆心的几何
性质减少计算

圆心在过切点且与切线垂直的直线上,
圆心在每一条弦的中垂线上

两圆内切或外切时,切点与两圆
圆心三点共线

与圆有关的轨
迹方程求法

直接法

定义法

几何法

代入法

知能提升

学习误区

易忽视圆的
几何性质致误

总结
升华



学法
指导

求圆的标准方程

圆的一般方程的优点

圆的一般方程容易忽视圆成立的条件

圆系方程求过交点的圆,避免求解交点坐标,简化运算,求 λ 易错

定义

平面内与定点的距离等于定长的点的集合
(轨迹)是圆。定点为圆心,定长为半径

标准方程

圆心 $C(a, b)$,半径 r ,方程为:
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

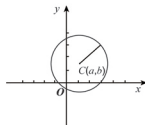
圆心 $(0, 0)$,半径 r ,方程为: $x^2+y^2=r^2$

求法

直接代入法

待定系数法

几何性质法



一般方程

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

判定方法

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时,
方程表示点 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$

当 $D^2+E^2-4F<0$ 时,
不表示任何图形

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时,
表示圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$,

半径为 $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$ 的圆

圆的参数方程

圆心 $C(a, b)$,半径 r
$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases} (\theta \text{ 是参数})$$

圆心 $(0, 0)$,半径 r :
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

先设圆的标准方程,然后
用待定系数法求解

抓住圆的性质及问题特点,用定义求出圆心坐标和圆上一点

突出了圆的方程形式上的特点,即缺少 xy 项的二次方程,适合于代数运算

对于 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 必须有 $D^2+E^2-4F \geq 0$

高中数学 第十章 圆与方程 第二节 直线、圆的位置关系及空间直角坐标系

(1)与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切于点 (x_1,y_1) 的切线方程是 $x_1x+y_1y=r^2$

过圆上一点的切线方程

(2)与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 相切于点 (x_1,y_1) 的切线方程是 $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

圆的切线方程

(3)与圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 相切且过切 (x_1,y_1) 点的切线方程是

$$x_1x+y_1y+D\frac{x_1+x}{2}+E\frac{y_1+y}{2}+F=0$$

代数法

设切点 $P(x_1,y_1)$, 解方程组求切点 $P\begin{cases}(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2 \\ (x_1-a)(x_0-a)+(y_1-b)(y_0-b)=r^2\end{cases}$

过圆外一点的切线方程

设切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$

切线长公式

解 $\frac{|ka-b-kx_0+y_0|}{\sqrt{k^2+1}}=r$ 可得 k

几何法



圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 外一点 $P(x_1,y_1)$ 向圆引切线长为 $\sqrt{x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F}$

总结升华 知识梳理

学习误区

知能提升

学法指导

直线与圆的位置关系

求过定点的圆的切线方程不先判断定点是在圆上还是在圆外致错

判断直线与圆的位置关系时,一般不用联立方程消未知数的方法,更多时候用几何方法节省计算。以免用“繁”弃简

求两圆的公共弦长也常用几何方法,利用圆的半径、半弦长、弦心距构成的直角三角形,用勾股定理求解,而不用代数法。

代数法是方程思想在解析几何中的重要体现,也是解析几何的实质

圆的直径 $AB, A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ 它的方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=r^2$$

两圆的公切线条数与两圆的位置关系密切相关,因而“通过判断两圆的位置关系来确定公切线的条数”可简化解题过程

几何法解圆的问题,计算量小

直观易理解但不能求出点的坐标

几何法

判断

只能判断交点个数,不能准确判断位置关系

代数法

将两圆方程联立,解出两交点坐标,利用距离公式求解

代数法

公共弦长的求法

求出公共弦所在的直线方程,利用圆的半径长、半弦长、弦心距构成的直角三角形,用勾股定理求解

几何法

利用圆心到直线的距离

求解直线方程与圆的方程组成的方程组,通过解的个数判断

代数法

几何法



点与圆

设点 $M(m,n)$, 圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

点 $M(m,n)$ 在圆上 $\Leftrightarrow (m-a)^2+(n-b)^2=r^2$

点 $M(m,n)$ 在圆内 $\Leftrightarrow (m-a)^2+(n-b)^2 < r^2$

点 $M(m,n)$ 在圆外 $\Leftrightarrow (m-a)^2+(n-b)^2 > r^2$

联立直线与圆的方程,消去一个未知数,得到关于另一个未知数的一元二次方程

代数法

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 直线与圆相交

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 直线与圆相切

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 直线与圆相离

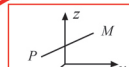
直线与圆

几何法

$d > r \Leftrightarrow$ 直线与圆相离

$d = r \Leftrightarrow$ 直线与圆相切

$d < r \Leftrightarrow$ 直线与圆相交



P, M 两点的距离为:

$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

空间直角坐标系

与直线和圆有关的最值问题、轨迹问题

最值问题

直线和圆都有鲜明的几何特征,解题时,注意数形结合利用图形的几何直观达到解题目的

轨迹问题

会求曲线方程的方法求解与圆有关的轨迹问题

圆与圆的位置关系

判定方法

外离: $d > R+r$

外切: $d = R+r$

相交: $R-r < d < R+r$

内切: $d = R-r$

内含: $d < R-r$

d 为圆心距

公切线条数的确定

四条: $d > R+r$

三条: $d = R+r$

两条: $R-r < d < R+r$

一条: $d = R-r$

零条: $d < R-r$

两圆的公共弦

公共弦所在的直线方程 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$

公共弦长的求法

代数方法

几何法

具有某一共同性质的圆的集合,叫做圆系,它们的方程叫做圆系方程

高中数学 第十一章 圆锥曲线 第一节 椭圆

椭圆上到中心距离最小的点是短轴端点,到中心距离最大的点是长轴端点

椭圆上到焦点距离最大和最小的点是长轴端点

设椭圆的中心为 O , 焦点为 F , D 是短轴的一个端点, 则 $|DF|=a$, $e = \cos\angle OFD$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (0 < e < 1), a^2 = b^2 + c^2$$

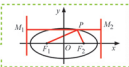
通过寻找 a 、 b 、 c 之间的另一关系式消去 b , 构造关于 e 的方程求之

定点必须在直线上

比值必须小于1

符合椭圆第二定义的动点轨迹肯定是椭圆, 但它不一定具有标准方程形式

$$e = \frac{c}{a} = \frac{|PF_1|}{|PM_1|} \quad (0 < e < 1)$$



当 $2a < |F_1F_2|$ 时, 动点的轨迹不存在

只有当 $2a > |F_1F_2|$ 时, 动点的轨迹才是椭圆

当 $2a = |F_1F_2|$ 时, 动点的轨迹是线段 F_1F_2

利用定义求椭圆的标准方程

利用椭圆上点 P 与两焦点的距离和 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ 解焦点三角形问题

$$|P_1P_2| = |x_1 - x_2| \sqrt{1 + k^2}$$

$$= |y_1 - y_2| \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$$



弦长公式

焦点三角形

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin \theta = \frac{1}{2} c^2 \tan \frac{\theta}{2} = c |y_P|$$

$$\cos \theta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 4c^2}{2r_1 r_2} = \frac{2b^2}{r_1 r_2} - 1$$



知能提升

$$\text{椭圆的焦距为 } \frac{a^2}{c} - c = \frac{b^2}{c} \quad \text{通径为 } 2ep = \frac{2b^2}{a}$$

椭圆的参数方程是换元的基础

椭圆的焦半径问题是椭圆的基础问题, 有着独特的解决方法, 在解题中有着广泛灵活的运用。一般涉及椭圆上任一点到焦点的距离问题时, 可考虑用焦半径公式来处理

学习误区

求椭圆的标准方程时, 一定要注意三步

定位

定型

定量

总结升华



学法指导

$$\text{焦点在 } x \text{ 轴 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

$$\text{焦点在 } y \text{ 轴 } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

$$\text{焦点不确定 } \text{设 } Ax^2 + By^2 = 1 (A > 0, B > 0, A \neq B)$$

椭圆标准方程有两种, 取决于焦点所在的坐标轴; 两种标准方程中, 若 x^2 分母大, 则焦点在 x 轴上; 若 y^2 的分母大, 则焦点在 y 轴上

结论

这里的“标准”指的是中心在原点, 对称轴为坐标轴

标准方程

注意

定位

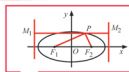
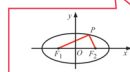
定量

两个参数 a 和 b 确定了椭圆的形状和大小, 是椭圆的定形条件; a, b, c 三者中 a 最大, 且满足 $a^2 = b^2 + c^2$

焦半径 (见表)

定义

第一定义 $|PF_1| + |PF_2| = 2a > |F_1F_2| (a > 0)$ 的点 P 的轨迹



第二定义: $\frac{|PF_2|}{|PM_2|} = e (0 < e < 1)$ 的点 P 的轨迹

参数方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \quad \text{参数方程为 } \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0) \quad \text{参数方程为 } \begin{cases} x = b \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}$$

知识梳理

几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
图形		
对称性	中心(0,0), 对称轴: x 、 y	
焦点	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
顶点	$(\pm a, 0), (0, \pm b)$	$(\pm b, 0), (0, \pm a)$
范围	$ x \leq a, y \leq b$	$ x \leq b, y \leq a$
焦距、离心率	$ F_1F_2 = 2c, c^2 = a^2 - b^2, e = \frac{c}{a} (0 < e < 1)$	
长、短轴	长轴长 $=2a$, 短轴长 $=2b$	
准线方程	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{a^2}{c}$
焦半径	$ PF_1 = a - ex_0$ $ PF_2 = a - ex_0$	$ PF_1 = a - ey_0$ $ PF_2 = a - ey_0$

高中数学 第十一章 圆锥曲线 第二节 双曲线



高中数学 第十一章 圆锥曲线 第三节 抛物线

利用抛物线定义求解时,对定义理解不正确致误

学习误区

直线与抛物线只有一个交点时,直线可以是平行于对称轴的直线(此时称直线与抛物线相切),也可以是直线与抛物线相交

知能提升

抛物线的定义本身也给出了抛物线的一个重要性质,即其上任一点的焦半径等于它到准线的距离。这样能把焦半径转化为平行于轴的线段长,使问题简化

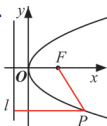
直线与抛物线的中点弦问题可用:(1)点差法,对交点“设而不求”; (2)判别式,根与系数关系法

直线与抛物线的交点弦问题可用点差法“设而不求”

知识梳理

定义

平面内到定点 F 的距离与到定直线 l 距离相等的点的集合



点 F 是焦点,直线 l 是准线

几何性质

总结
升华

$$x = -\frac{b}{2a}$$

对称轴

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right)$$

顶点坐标

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 由 $y = ax^2$ 平移而来

$y = ax^2$ 的标准方程 $x^2 = \frac{1}{a}y$

$a > 0$, 开口向上, 焦点坐标 $(0, \frac{1}{4a})$

$a < 0$, 开口向下, 焦点坐标 $(0, -\frac{1}{4a})$

它的离心率为1, 只有一个焦点, 一个顶点, 一条对称轴, 一条准线, 没有对称中心, 因此也称为无心圆锥曲线, 而椭圆和双曲线称为有心圆锥曲线

p 是焦点 F 到准线 l 的距离, p 越大, 抛物线的开口越大; p 越小, 抛物线的开口越小

通过焦点 F 且垂直于轴的抛物线的弦 AB 叫做抛物线的通径, 长为 $2p$

与椭圆、双曲线相比

$2p$ 及 p 的几何意义

学
法
指
导

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)
与抛物线标准方程的关系

几何
性质

定义中必须注意

定点 F 不在定直线 l 上, 否则动点的轨迹是过定点 F 垂直于直线 l 的一条直线

定义归纳为“一动三定”: 动点 P 、定点(焦点)、定直线(准线)、定值($e=1$)

常用方法(待定系数法)

设出适合条件的抛物线的标准方程

利用已知条件建立待定系数的方程

求出待定的系数, 进而写出方程

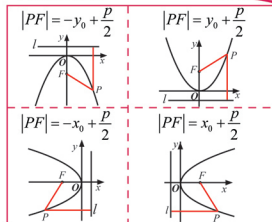
标准方程的求法

若已知对称轴在确定的坐标轴的某半轴上, 则由条件设为标准方程中相应的那个, 从而求解

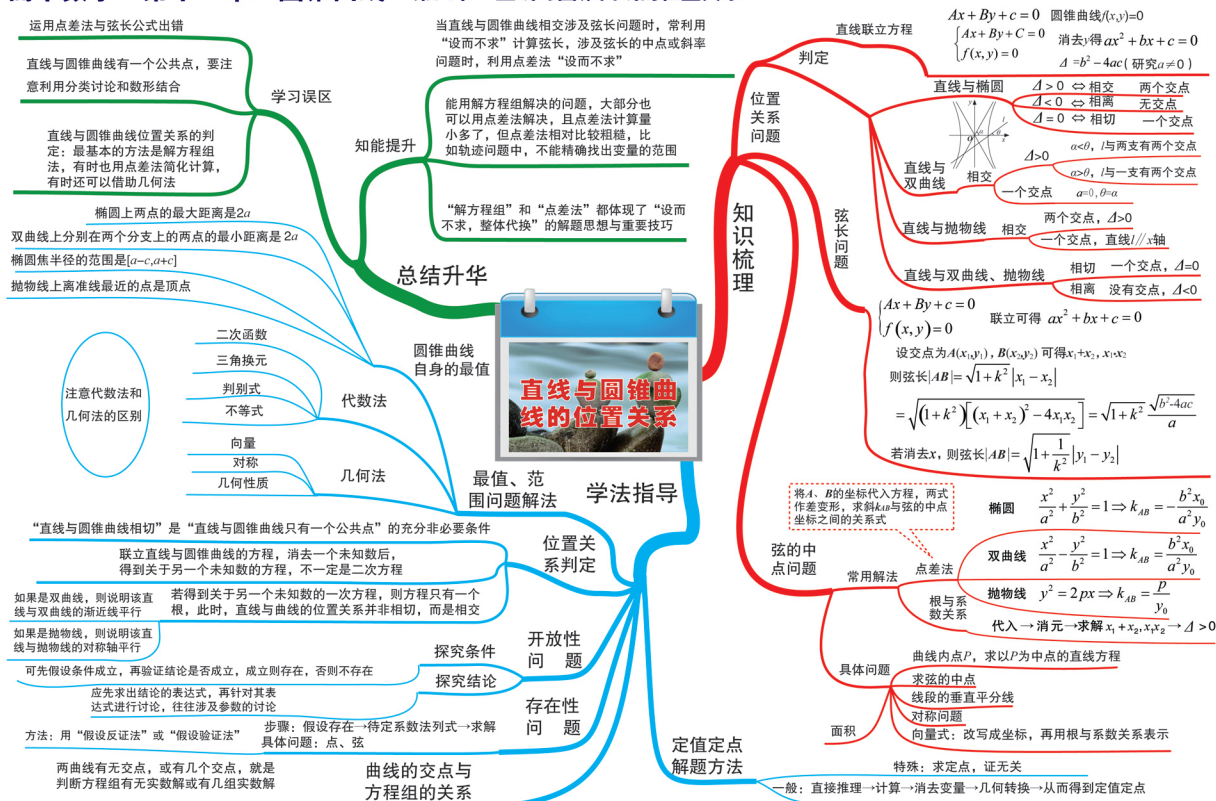
若已知对称轴在坐标轴上而不知开口方向, 可简单设为 $x = ay^2$, $y = ax^2$, 避免讨论

焦半径

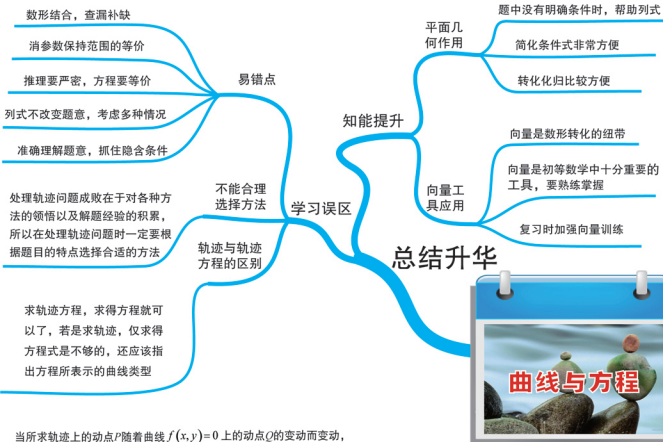
图 形	标准方程 ($p>0$)	焦点、 范围	准 线	顶点、 对称轴	焦 半 径	离 心 率	通 径
	$y^2 = 2px$	$(\frac{p}{2}, 0)$ $x \geq 0$	$x = -\frac{p}{2}$	$(0, 0)$ x 轴	$ PF = x_0 + \frac{p}{2}$	$e=1$	$2p$
	$y^2 = -2px$	$(-\frac{p}{2}, 0)$ $x \leq 0$	$x = \frac{p}{2}$	$(0, 0)$ x 轴	$ PF = -x_0 + \frac{p}{2}$		
	$x^2 = 2py$	$(0, \frac{p}{2})$ $y \geq 0$	$y = -\frac{p}{2}$	$(0, 0)$ y 轴	$ PF = y_0 + \frac{p}{2}$		
	$x^2 = -2py$	$(0, -\frac{p}{2})$ $y \leq 0$	$y = \frac{p}{2}$	$(0, 0)$ y 轴	$ PF = -y_0 + \frac{p}{2}$		



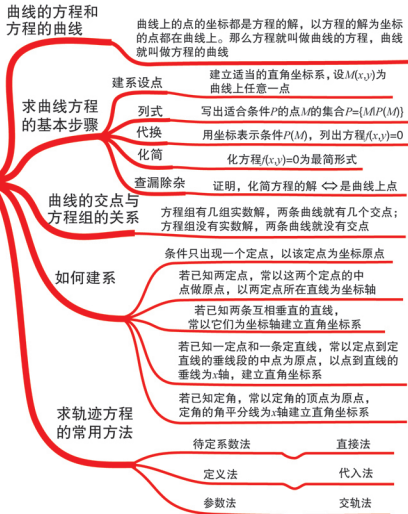
高中数学 第十一章 圆锥曲线 第四节 直线与圆锥曲线的位置关系



高中数学 第十一章 圆锥曲线 第五节 曲线与方程



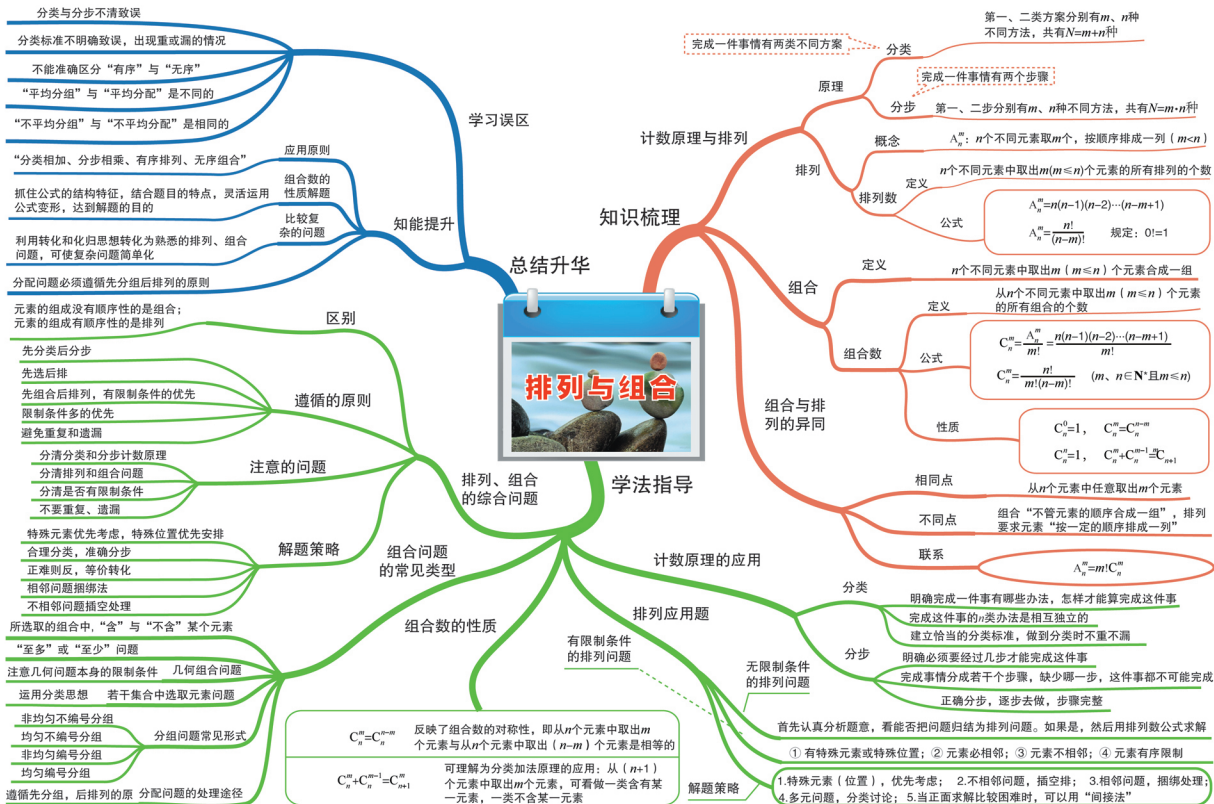
知识梳理



学法指导



高中数学 第十二章 计数原理 第一、二节 排列与组合



高中数学 第十二章 计数原理 第三节 二项式定理

注意分清二项式系数与系数的区别，避免出错

运用二项式定理时，不能够忽视展开式中系数的正负号

二项式系数的最大值与系数的最大值的混淆错误

要证明一个式子能够被另一个式子整除，只要证明这个式子按二项式定理展开后的各项均能够被另一个式子整除即可

利用二项式定理进行近似计算时，要根据要求选取展开式中保留的项，以最后一项小数位超过要求即可

涉及展开式的系数和的问题，一般采用赋值法

知能提升

总结升华



知识梳理

二项式定理及相关概念

定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n b^n$$

所表示的定理叫做二项式定理，等式右边叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式，其中 $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ 叫做二项式系数

变形

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \dots + (-1)^r C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + (-1)^n C_n^n b^n$$

$$(1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^r x^{n-r} + \dots + C_n^n x^n$$

二项式系数

$$C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^r, \dots, C_n^n$$

二项展开式的通项公式

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$$

二项式系数的性质

对称性

在二项式定理中，与首尾两项“等距离”的两项的二项式系数相等，即 $C_n^m = C_n^{n-m}$

增减性

当 $m < \frac{n+1}{2}$ 时， C_n^m 逐渐增大

当 $m > \frac{n+1}{2}$ 时， C_n^m 逐渐减小

最大值

若 n 为偶数，中间一项的二项式系数最大 $C_n^{\frac{n}{2}}$

若 n 为奇数，则中间两项二项式系数最大 $C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$

二项式系数的和

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}$$

二项式定理的应用

近似计算

$$(1-x)^n \approx 1-nx$$

$|x|$ 与1相比很小且 n 不大时

证明有关不等式

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

巧妙地构造二项式，应注意运用放缩法

证明整除问题或求余数

- (1) 构造一个与题目相关的二项式；
- (2) 处理整除问题，通常把底数写成除数与某个数的和或差的形式，再用二项式定理展开；
- (3) 注意余数的范围

二项展开式的特点

项数

共有 $n+1$ 项

依次为组合数 $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ 二项式系数

每一项的次数是一样的，即为 n 次，展开式依 a 的降幂排列、 b 的升幂排列展开

巧妙构造二项式

利用二项式证明不等式的处理方法

适时运用放缩法

思路

要证明一个式子能够被另外一个式子整除，只要证明这个式子按二项式定理展开后的各项均能够被另一个式子整除

方法

通常把底数写成除数（或与除数密切相关的数）与某数的和或差的形式，再用二项式定理展开，只考虑后面几项就可以了

利用二项式定理解决整除问题

学法指导

通项公式应用

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$$

a, b, n, r, T 五个元素知四求一

二项式系数问题

求二项展开式中的特殊项

求特定项或特定项的系数

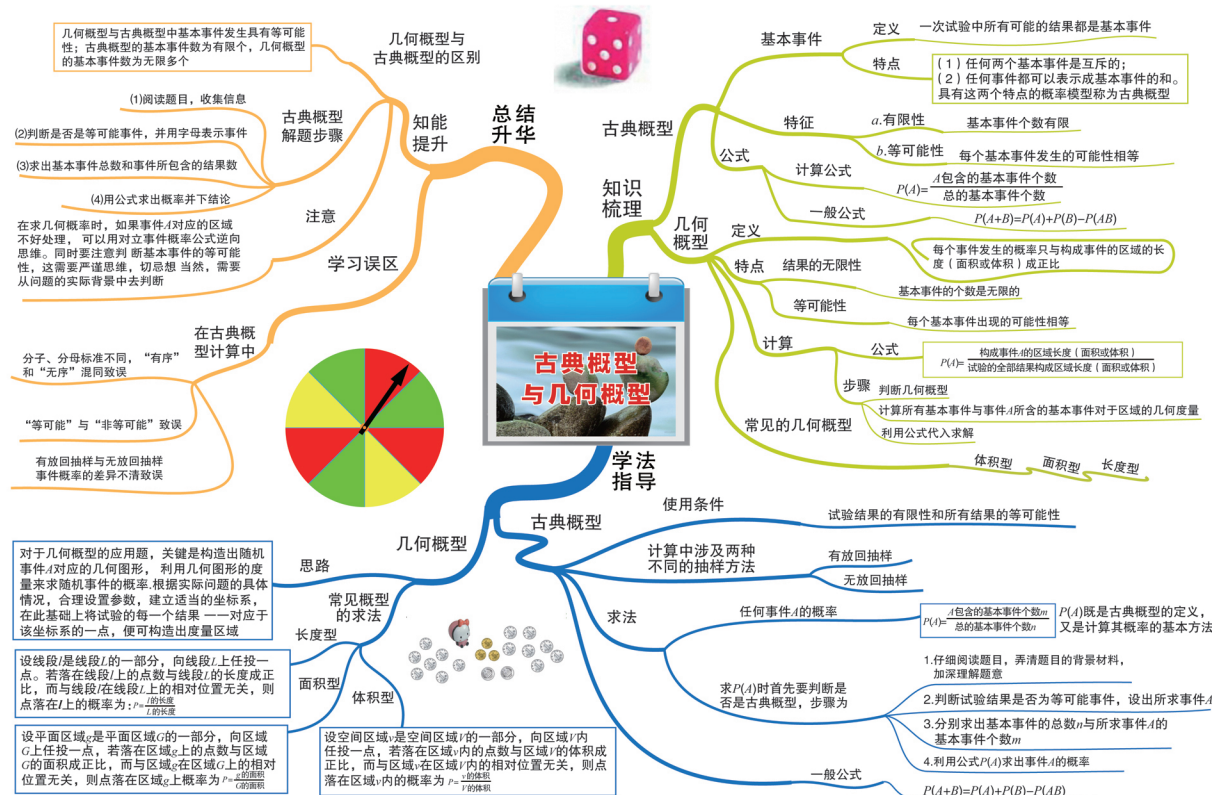
求所有项系数的和

关于组合等式的证明，常用“构造法”

构造函数或构造同一问题的两种算法

采用“特殊值取代法”，常令字母变量为1

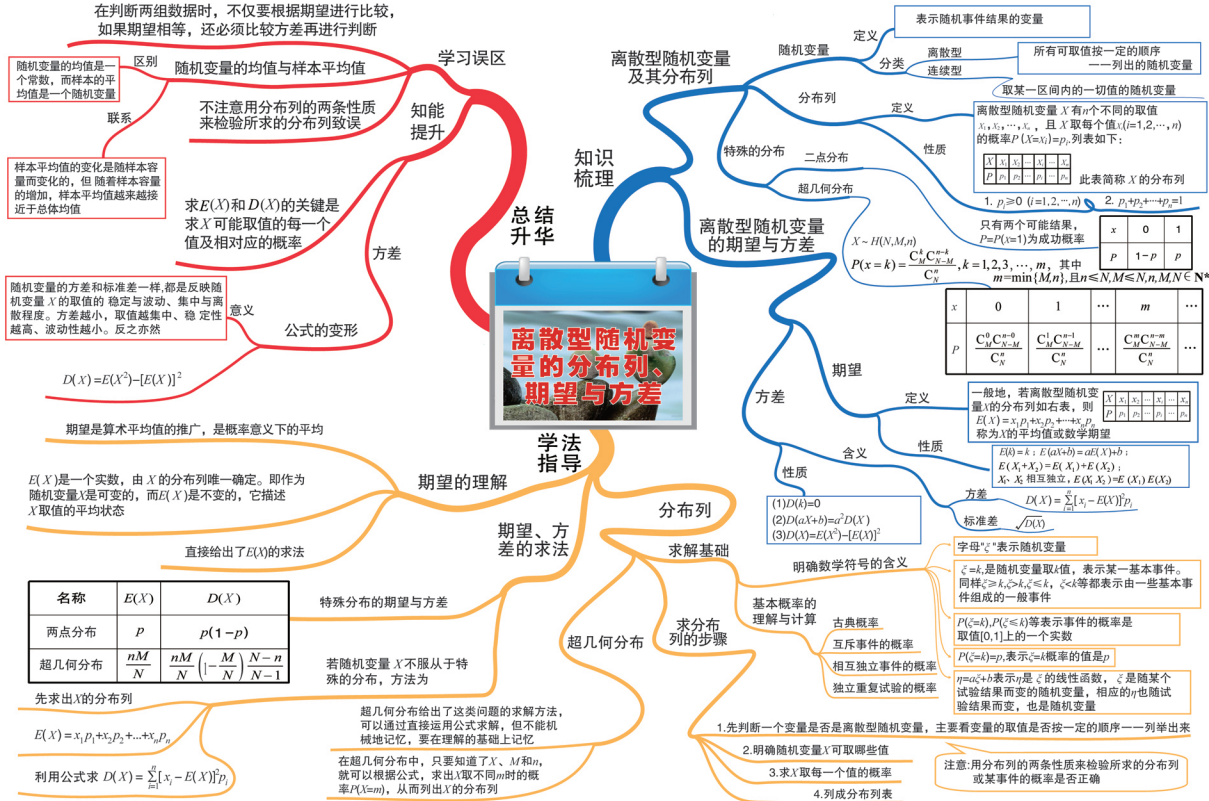
高中数学 第十三章 概率与统计 第二节 古典概型与几何概型



高中数学 第十三章 概率与统计

在判断两组数据时，不仅要根据期望进行比较，如果期望相等，还必须比较方差再进行判断

第三节 离散型随机变量的分布列、期望与方差



高中数学 第十三章 概率与统计 第四节 二项分布与正态分布

由于数据过大可能结果算错，或对茎叶图的特点不熟悉致错

0.682 6, 0.954 4, 0.997 4这三个数不能准确记忆致错

公式 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的 μ 与 σ 不能正确理解、计算致误

若随机变量服从二项分布，可直接应用二项分布的期望、方差公式求期望和方差

理解正态曲线的形状特征，如对称轴、顶点变化趋势等。运用 3σ 原则，解决正态分布问题

求正态分布的概率，关键在于转化为标准正态分布

正态分布有两个重要的参数：平均数（期望、数学期望） μ 和标准差 σ ，不但要明白 μ 和 σ 在统计上的意义，还要对应到正态曲线上的曲线几何意义，做到从概率、统计、曲线、函数这四个方面来把握和理解，其中后两个方面是作为数学工具来为前两个方面服务的

3σ 原则：服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的 $X \in (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 的概率为 0.997 4

若在一次试验中某事件发生的概率是 p ，则在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率是

$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ，其中 $k=0, 1, 2, \dots, n, q=1-p$

随机变量 X 的概率分布如表：称随机变量 X 服从二项分布。记作 $X \sim B(n, p)$ ，其中 n, p 为参数。

X	0	1	...	k	...	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

知识梳理

总结升华

知能提升

二项分布与正态分布

学法指导

解决小概率事件问题时要用到 3σ 原则

每次试验中，事件发生的概率是相同的

每次试验中的事件是相互独立的

每次试验只有两种结果：事件要么发生，要么不发生

随机变量是这 n 次独立重复试验中事件发生的次数

X ——事件 A 发生的次数

p ——每次试验中 A 发生的概率

n ——独立重复试验的次数

k —— n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 k 次

n 次独立重复试验中，事件 A 发生的次数 X 是一个随机变量， X 的分布列为： $(p+q)^n$ 展开式的第 $k+1$ 项，其中 $0 \leq k \leq n, p+q=1, k=0, 1, 2, \dots, n$

$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ，它是 $(p+q)^n$ 的第 $k+1$ 项

公式 $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ 字母含义

二项分布与 n 次独立重复试验的关系

实际运用中往往出现数量“较大”、“很大”、“非常多”等字眼，这表明试验可视为独立重复试验

公式

$X \sim B(n, p) = P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

含义

二项分布的期望与方差

$E(X) = np$

$D(X) = np(1-p)$

分布列

二项分布

正态分布



正态曲线

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{2\sigma^2}}$ ($x \in R, \sigma > 0$) 其中 π 是圆周率， e 是自然对数的底数， x 是随机变量的取值， μ 为正态分布的均值， σ 为正态分布的标准差。正态分布一般记为 $N(\mu, \sigma^2)$ ， $f(x)$ 的图像为正态分布密度曲线，简称正态曲线

(1) 曲线在 x 轴的上方，与 x 轴不相交

(2) 曲线关于直线 $x=\mu$ 对称

(3) 曲线在 $x=\mu$ 时位于最高点： $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

(4) 当 $x < \mu$ 时，曲线上升；当 $x > \mu$ 时，曲线下降。并且当曲线向左、右两边无限延伸时，以 x 轴为渐近线，向它无限靠近

(5) 当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定， σ 越大，曲线越“矮胖”，表示总体的分布越分散； σ 越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越集中；当 σ 一定时，曲线随 μ 的变化而沿 x 轴平移

(6) 曲线与 x 轴围成的区域面积为 1

$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.682 6$

$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954 4$

$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997 4$

正态分布的期望与方差

$E(X) = \mu$

$D(X) = \sigma^2$

定义

当 $\mu=0, \sigma=1$ 时，正态总体称为标准正态总体，其相应的函数表达式是 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ($x \in R$)，其相应的曲线为标准正态曲线

分布函数

$X \sim N(0, 1)$

$\phi(x) = P(X \leq x)$

$\phi(x) = 1 - \phi(-x), x < 0$

计算

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$F(x) = P(X \leq x) = \phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$X \sim N(0, 1)$

$P(a < x < b) = \phi(b) - \phi(a)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = \phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

参数的意义：“ x ”表示随机变量，“ μ ”为所给数据的均值，“ σ ”为所给数据的标准差

若随机变量 X 服从正态分布，则 X 在一点上的概率为 0，即 $P(X=a)=0$ ，而 $\{X=a\}$ 并不是不可能事件。所以概率为 0 的事件不一定是不能事件。从而 $P(X=a)=P(X \leq a)$ 是成立的，这与离散型随机变量不同

1. 熟记 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.682 6$ ， $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954 4$ ， $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997 4$ 的值，把所求问题转化到这三个区间内解决

2. 充分利用正态曲线的对称性和曲线与 x 轴之间的面积为 1

(1) 正态曲线关于直线 $x=\mu$ 对称，从而在关于 $x=\mu$ 对称的区间上概率相等

(2) $P(X < a) = 1 - P(X \geq a)$ ， $P(X < -a) = P(X \geq a)$

高中数学 第十三章 概率与统计 第五节 统计

相关关系与函数关系不同，函数关系中的两个变量关系是一种确定的关系，相关关系是一种非确定的关系

两个变量具有相关关系是回归分析的前提

- 步骤
- (1) 画出两个变量的散点图
 - (2) 求回归直线方程
 - (3) 利用回归直线方程进行预报

(1) 回归方程只适用于所研究的样本的总体

(2) 建立的回归方程一般都有时间性

(3) 样本取值的范围会影响回归方程的适用范围，一般不能够超过这个适用范围，否则将没有实用价值

(4) 不能期望回归方程得到的预报值是预报变量的精确值，它只是预报变量的可能取值的平均值

(1) 若问题中已给出经验公式，这时可以将解释变量进行变换

(2) 如果问题中没有给出经验公式，需要我们画出已知数据的散点图，通过与各种函数的图像作比较，选择一种与这些散点图拟合得最好的函数，然后再采用适当的变量变换

频率分布直方图的高等于该组的频率/组距，而不等于频率

茎叶图中相同的数据要重复记录，不能遗漏

相关关系与函数关系等同的错误

利用回归分析的方法对两个具有线性相关关系的变量进行研究

注意事项

通过变量变换的方法转化为线性回归问题，分析非线性回归问题的具体做法

知能提升

学习误区

总结升华



类别	共同点	各自特点	相互联系	适应范围
简单随机抽样	抽样过程中每个个体被抽到的概率相等	从总体中逐个抽取		总体中个体数较少
系统抽样		将总体分成几个部分，按事先确定的规则在各部分抽取	在起始部分抽样时采用简单随机抽样	总体中个体数较多
分层抽样		将总体分成几层，分层进行抽取	各层抽样时采用简单随机抽样	总体由差异明显的几部分组成

用样本估计总体

统计的基本思想

方差单位是原数据单位的平方

方差较大的波动较大，方差较小的波动较小

标准差单位是原数据的单位

描述一组数据波动情况的特征数

方差与标准差

确定特定量之间是否有相关关系，若有，就找出它们之间近似的数学表达式

根据一组数据预测变量的取值及判断变量取值的变化趋势

求出回归方程

- (1) 确定研究对象
- (2) 画出解释变量与预报变量的散点图
- (3) 确定回归方程的类型
- (4) 估计回归方程中的参数
- (5) 得出结果，分析是否异常

建立回归模型的基本步骤

图中纵轴表示频率与组距的比值

小长方形的面积=组距 × 频率/组距 = 频率

频率分布直方图



作图的步骤

含义

各长方形的面积之和等于1

(5) 画频率分布直方图

各小组频率 = 小组频数 / 样本容量

简单随机抽样

有关概念

总体：一般把所考查对象的某一数值指标的全体构成的集合看成总体

个体：构成总体的每一个元素叫做个体

样本：总体中抽出若干个个体组成的集合叫做样本

方法

抽签法：设一个总体含有N个个体，从中不放回抽取n个个体作为样本 (n ≤ N)，且每次抽取时总体内的各个个体被抽到的机会都相等的抽样方法

随机数表法

定义

当总体容量较大时，将总体均分，按照预定的规则，从每一部分抽取1个个体，得到所需要的样本的抽样方法

步骤

编号 分段 确定起始的个体号 取出样本

总体个数 不是整数时，样本容量 删除部分个体

系统抽样

分层抽样

定义

当已知总体由差异明显的几部分组成时，常将总体分成几部分，然后按照各部分所占的比例进行抽样，这种抽样方法叫分层抽样。其分成的各个部分叫做层

特点

随机抽样

用样本估计总体

变量间的相关关系

统计案例

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2}}$$

回归分析的基本思想及其初步应用

相关系数r

r > 0, 两个变量正相关; r < 0, 两个变量负相关

性质

|r| ≤ 1, 且|r|越接近1, 相关程度越大; |r|越接近0, 相关程度越小

独立性检验的基本思想及其初步应用

卡方的含义及计算公式

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

卡方的两个临界值

3.841和6.635

独立性检验的一般步骤

频率分布表 频率分布直方图 频率分布折线图 总体密度曲线 茎叶图

众数：在一组数据中，出现次数较多的数据

中位数：将一组数据按大小依次排列，把处在中间位置的一个数据 (或中间两个数据的平均数) 叫做这组数据的中位数

平均数：一组数据的总和除以数据个数所得商就是平均数

标准差：n个数据是x₁, x₂, ..., x_n, 那么 $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

方差：n个数据是x₁, x₂, ..., x_n, 那么 $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

两个变量的线性相关

散点图 正相关 负相关 线性相关关系、回归直线

回归直线

(1) 最小二乘法：求回归直线使得样本数据点到它的距离的平方和最小的方法叫做最小二乘法

(2) 回归方程：y = a + bx 使一组数据的变量(x₁, y₁), (x₂, y₂), ..., (x_n, y_n) 满足

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$$

$$(a, b \text{ 是待定参数}) \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \\ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i(a + bx_i) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 a + \sum_{i=1}^n x_i^3 b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 a + \sum_{i=1}^n x_i^3 b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 a + \sum_{i=1}^n x_i^3 b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 a + \sum_{i=1}^n x_i^3 b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 a + \sum_{i=1}^n x_i^3 b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 a + \sum_{i=1}^n x_i^3 b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

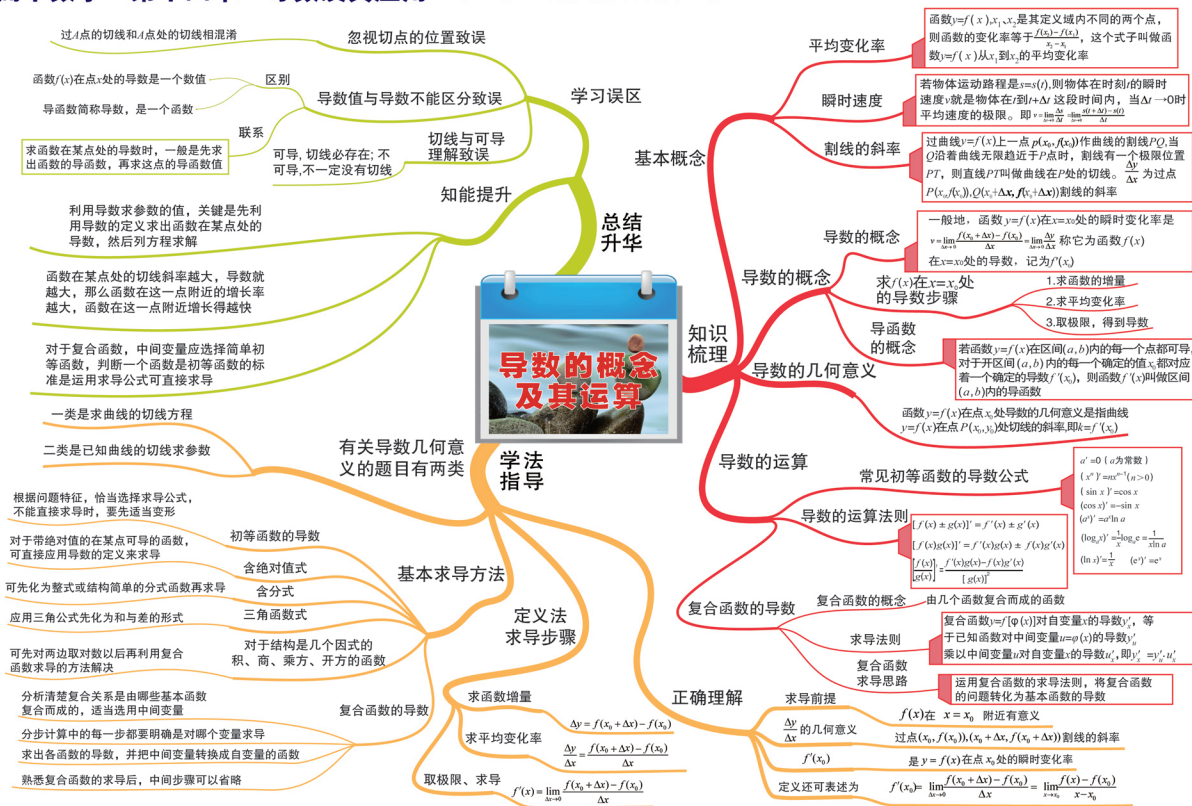
$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 a + \sum_{i=1}^n x_i^3 b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 a + \sum_{i=1}^n x_i^3 b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 a + \sum_{i=1}^n x_i^3 b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b\bar{x} = \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 a + \sum_{i=1}^n x_i^3 b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

高中数学 第十四章 导数及其应用 第一节 导数的概念及其运算



高中数学 第十四章 导数及其应用 第二节 导数的应用



高中数学 第十四章 导数及其应用 第三节 定积分与微积分基本定理

当对应曲边梯形位于x轴下方时，定积分取负值

求曲线与直线所围成的图形面积时，应先判断曲线在x轴上方还是下方

找到被积函数的原函数是解决定积分问题的关键

分段函数求积分问题，要根据条件选择合适形式的被积表达式，特别要注意分清被积函数的上、下限位置

用定积分求平面图形的面积时，一般要先画出草图

(1) 正确利用导数的逆运算求原函数

(2) 学会将复杂的函数转化为简单的函数

(3) 正确求简单积分的运算

求定积分应该注意的几点

图形位置
不清楚致计算错误

学习误区

知能提升

总结
升华



学法
指导

知识
梳理

定积分的定义
及几何意义

定积分的计算

在几何中的
应用

定积分的
简单应用

在物理中的
应用

定积分

简单应用

微积分
基本定理

变上限积分

微积分基本定理

定积分的计算

定义法

公式法

微积分基本定理

用定义求定积分的一般步骤

用定义求积分不容易进行的时候，可以根据定积分的几何意义来计算定积分

关键在于求出被积函数的原函数 $F(x)$

一般地，若 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数，并且 $F'(x)=f(x)$ ，则 $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$

方法

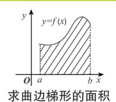
换元积分法

分部积分法

定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示由曲线 $y=f(x)$ ($f(x) \geq 0$)与直线 $x=a, x=b$ 及x轴所围成平面曲边梯形的面积



- $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k 为常数);
- $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$;
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ($a < c < b$);
- $f(x)$ 为偶函数, $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$;
- $f(x)$ 为奇函数, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$



在几何中

在物理中

匀变速运动的路程公式

变力做功问题

求曲边梯形的面积

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

一般地，若 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数，并且 $F'(x) = f(x)$ ，则： $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$

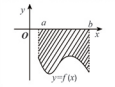
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

如图，求曲边梯形的面积

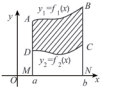


$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

如图，求曲边梯形面积



如图，求曲边梯形的面积



$$S = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx$$

作变速运动的物体所经过的路程 s ，等于其速度函数 $v(x)$ ($v(x) > 0$)在时间区间 $[a, b]$ 上的定积分

$$s = \int_a^b v(x) dx$$

匀变速运动的路程公式

变力做功问题

一物体在变力 $F(x)$ 的作用下作直线运动，若物体沿着与 F 相同的方向从 $x=a$ 移动到 $x=b$ ($a < b$)，则力所做的功： $W = \int_a^b F(x) dx$

高中数学 第十五章 推理与证明 第一节 合情推理与演绎推理

归纳分为完全归纳和不完全归纳，由归纳推理所得的结论虽然未必可靠，但它由特殊到一般，由具体到抽象的认识功能，对科学的发现是十分有用的，观察、实验、对有限的资料作归纳整理、提出带规律性的说法是科学研究的最基本方法

把类比、不完全归纳当做证明

类比推理的关键是找到合适的类比对象。一般平面中的一些元素与空间中的一些元素类比列表如下：

平面中的元素	空间中的元素
点	线
线	面
面	球
三角形	三棱锥
角	二面角
面积	体积
周长	表面积
.....	

数学证明主要是通过演绎推理来进行的。一个复杂的数学命题的推理往往是由多个“三段论”构成的。在演绎推理中，只要前提（大前提、小前提）和推理形式是正确的，结论必定是正确的，否则所得结论是错误的

从具体问题出发→观察、分析、比较、联想→归纳、类比→猜想结论→证明结论正确或举反例说明错误

思维进程不同：合情推理的思维进程是从个别到一般（归纳）或个别到个别（类比）；演绎推理的思维进程是从一般到个别

前提为真时，演绎推理推出的结论一定为真；而前提为真时，合情推理推出的结论不一定为真

在具体问题中，常用合情推理猜测、发现结论，而利用演绎推理验证或证明发现的结论

合情推理必须根据已有的知识经验经过观察、思考、分析才能得出正确的结论，观察、分析的过程就是合情推理的过程

演绎推理也离不开合情推理，在演绎推理的过程中要对已有的条件、已有的图形进行分析判断

常用归纳、类比的方法得到结论，再用演绎推理验证或证明发现的结论

归纳结论不一定正确

学习误区

知能提升

总结升华

根据一类事物的部分对象具有的某种性质，推出这类事物的所有对象都具有这种性质的推理，或由个别事实概括推出一般结论的推理叫归纳推理

1. 前提是几个已知的特殊现象，归纳得出的结论是尚属未知的一般现象，该结论超越了前提所包容的范围。
2. 得到的结论具有猜测的性质，结论是否真实，还需经过逻辑证明和实践检验，它不能作为一般的数学证明的工具。
3. 是一种具有创造性的推理。通过归纳推理得到猜想，可以作为进一步研究的起点，帮助人们发现问题和提出问题

- 第一步：对有限的资料进行观察、分析、归纳、整理
第二步：提出带有规律性的结论，即猜想
第三步：检验猜想

定义

定义

根据两类不同事物之间具有某些类似（或一致性），推测其中一类事物具有与另一类事物类似（或相同）的性质推理，叫做类比推理

1. 类比是从人们已经掌握的事物的属性，推测正在研究的事物的属性，是以旧有的认知为基础，类比出新的结果；
2. 类比是从一种事物的特殊属性推测另一种事物的特殊属性；
3. 类比的结果是猜测性的，不一定可靠，但它确有发现的功能

- 第一步：找出两类对象之间可以确切表述的相似特征
第二步：用一类对象的已知特征去推测另一类对象的特征，从而得出一个猜想
第三步：检验猜想

一般步骤

一般步骤

合情推理

归纳推理

类比推理

知识梳理

演绎推理

常见题型

- 题型一：平面到空间的类比 <升级类比>
题型二：圆锥曲线之间的类比 <同级类比>
题型三：等差与等比的类比 <运算类比>

推理的每一个步骤都是根据一般性命题推出特殊性命题的过程，这类根据一般性的真命题（或逻辑规则）导出特殊性命题为真的推理，叫做演绎推理

演绎推理是由一般到特殊的推理

当前提为真时，演绎推理推出的结论一定为真

三段论推理

大前提
小前提
结论

依据

若集合A的所有元素具有性质P，S是A的一个子集，那么S的所有元素也具有性质P

演绎推理与合情推理的区别与联系

归纳推理是由特殊到一般、部分到整体的推理，所得结论都超越了前提所包容的范围；类比推理是由特殊到特殊的推理，是在旧有认知的基础上得出新结果

二者都能由已知推测未知，都能用于猜测、发现一般结论。但所得的结论不一定正确，都要进行证明

一是找出合理的类比对象

二是再进一步找出两类事物间的相似性或一致性

归纳推理、类比推理的异同

学法指导

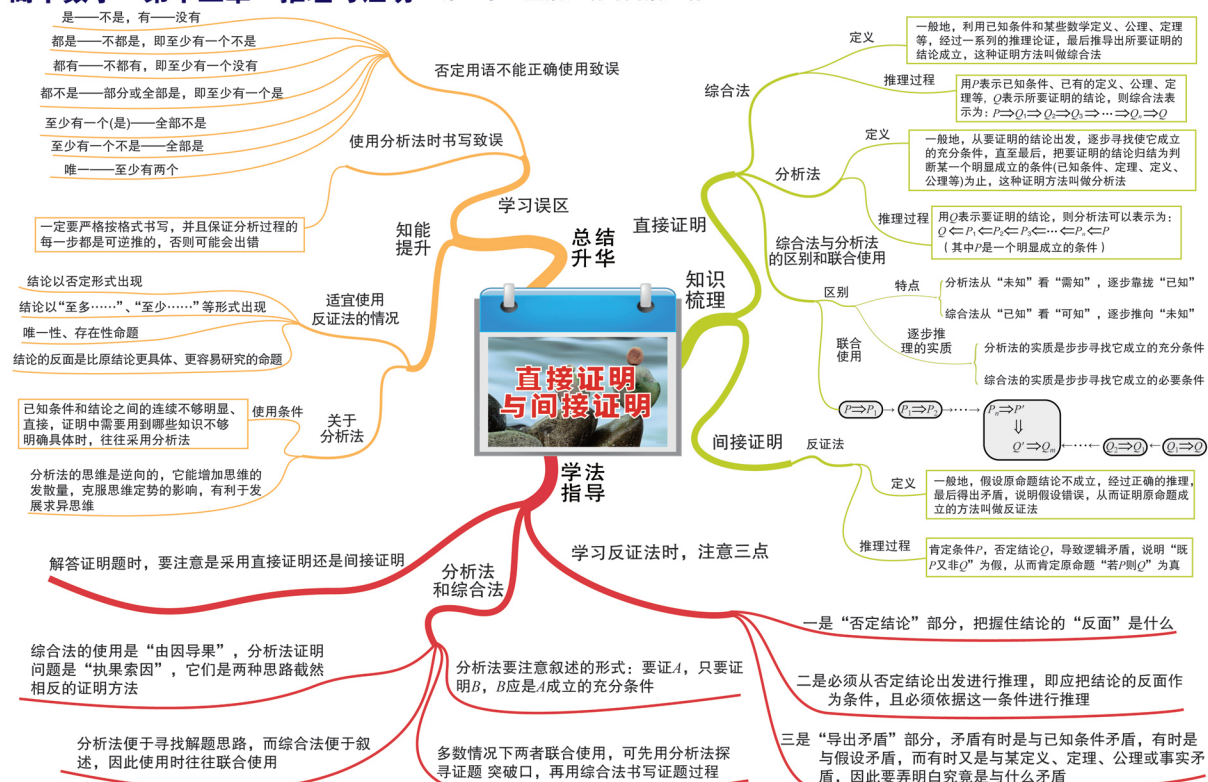
学习类比推理时应抓住两点

探索、发现问题

合情推理与演绎推理的区别

联系

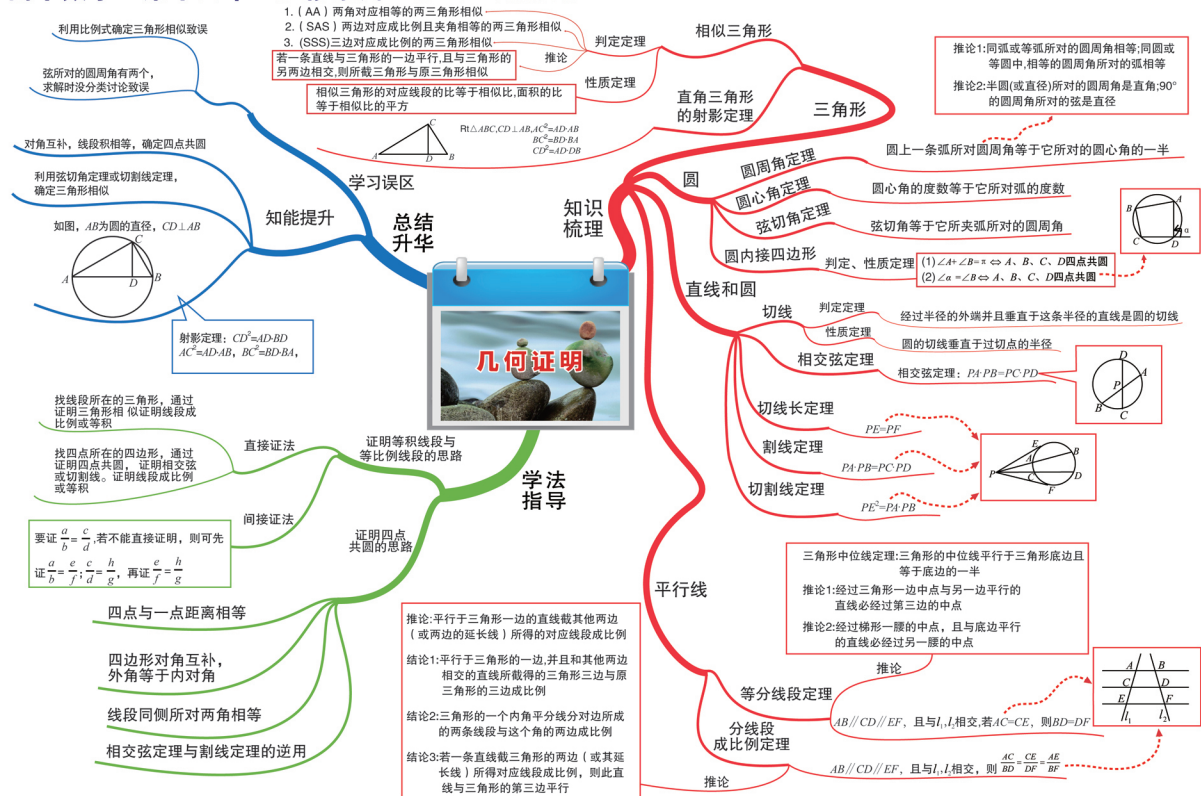
高中数学 第十五章 推理与证明 第二节 直接证明与间接证明



高中数学 第十五章 推理与证明 第三节 数学归纳法



高中数学 第十六章 选修系列 第一节 几何证明



高中数学 第十六章 选修系列 第二节 矩阵与变换

投影变换是映射，但不是一一映射

在伸缩变换之下，直线仍然变为直线，线段仍然变为线段

- (1) x轴上的点是不动点；
- (2) 保持图形面积大小不变，点间的距离和夹角大小可以改变且点的运动是沿坐标轴方向进行的，实质是横（纵）坐标成比例地运动

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- (1) 两个二阶矩阵相乘的结果从几何的角度来看，它表示的是原来两个矩阵的连续两次变换

- (2) 一般地两个变换之间是不能随意交换位置的，只有在特殊情况下才可以交换位置

- (3) 矩阵A,B对应的复合变换顺序是先进行矩阵B对应的变换，再进行矩阵A对应的变换，如果连续对一个向量实施n次矩阵A对应的变换，可以记为A^n的形式

一般的，把一个矩阵分解为几个矩阵的乘积是不唯一的，同样把一个变换分解为几个变换的复合的分解也是不唯一的。

矩阵的乘法运算与变换的复合之间的内在联系

——对应的平面几何变换都可以看成伸压、反射、旋转、切变变换的一次或多次复合，而伸压、反射、切变等变换通常叫做初等变换，对应的矩阵叫做初等变换矩阵

行矩阵 $[a_{11} \ a_{12}]$ 与列矩阵 $\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$ 的乘法规定： $[a_{11} \ a_{12}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = [a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21}]$

二阶矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 与列向量 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 的乘法规定： $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \times x_1 + a_{12} \times x_2 \\ a_{21} \times x_1 + a_{22} \times x_2 \end{bmatrix}$

两个二阶矩阵相乘的结果仍然是一个矩阵，其乘法规定如下：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} & a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} & a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} \end{bmatrix}$$

矩阵的乘法

可逆矩阵的求法

设A是一个二阶可逆矩阵， $AB=BA=E$

矩阵A可逆的必要条件是 $|A| \neq 0$

(1) 待定系数法

(2) 公式法

(3) 从几何变换的角度求解二阶矩阵乘法的逆矩阵

矩阵为 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$

(4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

矩阵特征值与特征向量的计算步骤

- (1) 写出矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的特征矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{bmatrix}$ 及特征多项式 $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - ad - bc$

(2) 令 $f(\lambda) = 0$ ，解特征方程 $f(\lambda) = 0$

(3) 特征方程的根即为矩阵的特征根： λ_1, λ_2 或 λ_1, λ_2

(4) 将 λ_i 代入齐次方程组 $\begin{cases} (\lambda_i - a)x - by = 0 \\ -cx + (\lambda_i - d)y = 0 \end{cases}$ 写出一组解。即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 分别为对应于 λ_1, λ_2 的特征向量

由mn个数排成的s行（横的）n列（纵的）的表称为一个矩阵

所有元素都为0的矩阵，即 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 零矩阵

二阶单位矩阵 $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 记为 E_2

矩阵的加法就是矩阵对应的元素相加，相加的矩阵必须具有相同的行数与列数

学习误区

交换律

结合律

总结升华

知识梳理



矩阵的乘法

学法指导

二元一次方程组 $\begin{cases} ax - by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

矩阵形式 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$

若系数矩阵可逆，则方程组有唯一解

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$

恒等变换

恒等变换

恒等变换

恒等变换

恒等变换

恒等变换

恒等变换

恒等变换

恒等变换

恒等变换

恒等变换

恒等变换

恒等变换

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

定义

设A是一个二阶可逆矩阵，如果存在二阶矩阵B，使 $AB=BA=E_2$ ，称二阶矩阵A是可逆矩阵，称B是二阶矩阵A的逆矩阵（简称逆阵），记作 A^{-1}

$C=A \cdot B$ ，矩阵A与B的乘积C的第i行第j列的元素 C_{ij} 等于第一矩阵A的第i行与第二个矩阵B的第j列的对应元素乘积的和 $\sum_{k=1}^2 a_{ik}b_{kj}$

一般地 $MN=NM, M^2=MM \dots M$

矩阵的乘方

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

结合律 $A(BC) = (AB)C$

分配律 $A(B+C) = AB+AC, (B+C)A = BA+CA$

数乘结合律 $k(A+B) = (kA+B) = (kA) + (kB)$

单位阵 $EA=AE=A$ ，这里E为单位阵

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

性质

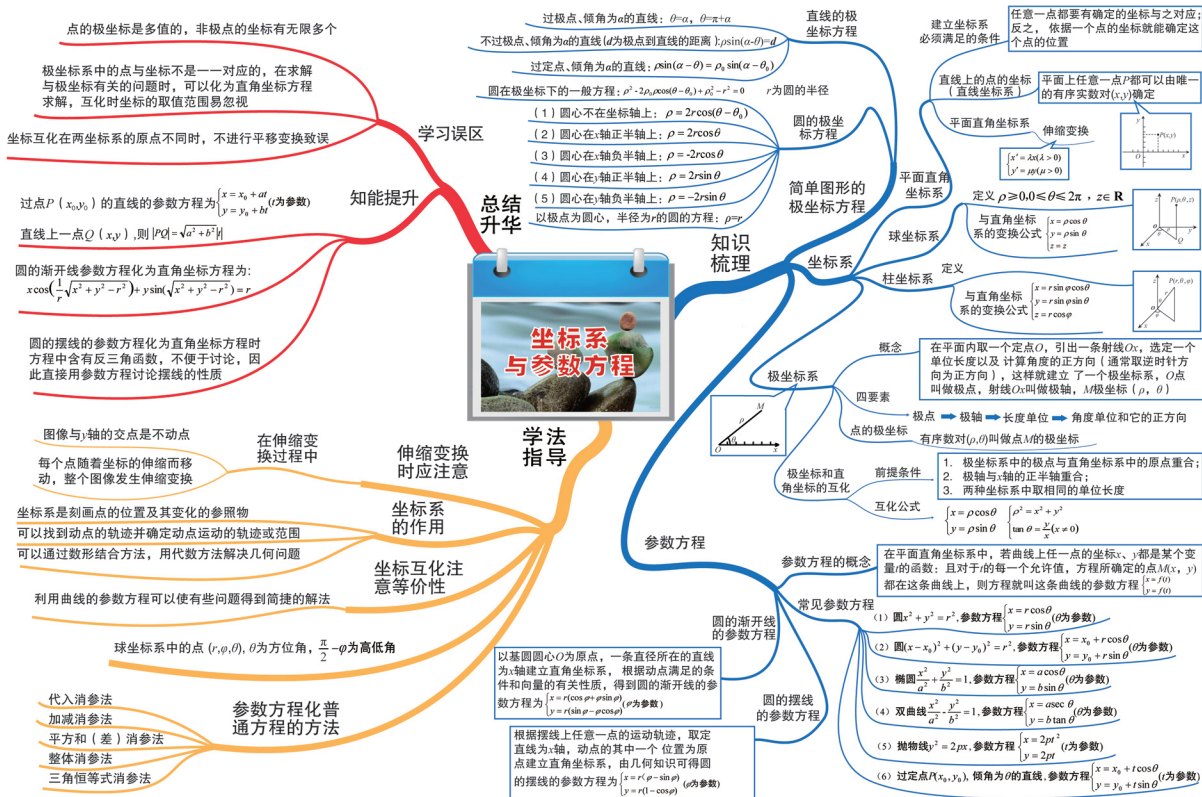
性质

性质

性质

性质

高中数学 第十六章 选修系列 第三节 坐标系与参数方程



高中数学 第十六章 选修系列 第四节 不等式

变形的的主要方法是因式分解、配方

判断过程必须详细叙述；如果作差以后的式子可以整理为关于某一个变量的二次式，则考虑用判别式法证

综合法是由因导果，而分析法是执果索因，两法相互转换，互相渗透，互为前提，充分运用这一辩证关系，可以加强 解题思路，开拓视野

证明不等式时，要依据题设、题目的特点和内在联系，选择适当的证明方法，要熟悉各种证法中的推理思维，并掌握相应的步骤、技巧和语言特点

不等式证明还有一些常用的方法：换元法、导数法、放缩法、反证法、函数单调性法、判別式法、数形结合法等。换元法主要有三角代换、均值代换两种。在应用换元法时，要注意代换的等价性

不等式证明常用的方法有比较法、综合法和分析法，它们是证明不等式的最基本的方法

放缩法是不等式证明中最重要的变形方法之一，放缩要有的放矢，目标可以从要证的结论中寻找

有些不等式，从正面证如果不易说清楚，可以考虑反证法 凡是含有“至少”“唯一”或含有其他否定词的命题，适宜用反证法

$$|x| < a \ (a > 0) \Leftrightarrow -a < x < a$$
$$|x| > a \ (a > 0) \Leftrightarrow x > a \text{ 或 } x < -a$$

零点分段法

不等式两边都是非负数时，两边同时平方

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

数轴上到原点距离为|x|的点

$|a+b| \leq |a|+|b|$ ，以 $|a+b|$ 、 $|a|$ 、 $|b|$ 为边的三角形两边之和不小于第三边

$|a-b| \leq |a-c|+|c-a|$ ，数轴上任意两点 a, b 的距离不大于 任意一点 c 与这两点距离的和（当且仅当 c 在 a, b 间取等号）

$|ax+b| \leq c, |ax+b| \geq c$ ，利用公式求解

$|x-a|+|x-b| \geq c$ ，利用零点分段法或几何意义求解

会用参数配方法讨论柯西不等式的一般情形

会用数学归纳法证明贝努利不等式

会用向量递归方法讨论排序问题

比较法证明时不明确“变形”、“判号”的方向出错

综合法与分析法步骤不明确致误

知能提升

学习误区

总结升华

知识梳理



不等式

不等式证明

去绝对值的主要方法

绝对值的几何意义

特殊不等式

会解或证明下列不等式

均值定理

不等式的性质

绝对值不等式

排序不等式

柯西不等式

代数形式

向量形式

一般形式

贝努利不等式

不等式的证明

放缩技巧

构造技巧

换元技巧

三角换元

增量换元

方法

比较法

综合法

分析法

反证法

判別式法

斜率法

向量法

函数单调性法

导数法

数学归纳法

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} \leq \sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \quad (a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 都是正数, } n \text{ 是正整数})$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ 或 } x > a \quad a > 0$$
$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$
 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 $a_1, b_1, \dots, b_n$ 的任意排列
 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n \leq a_1 a_1 + a_2 b_1 + \dots + a_n b_n$
反序和 $\leq$ 乱序和 $\leq$ 顺序和
当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 时，反序和=顺序和

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

“=” 成立 $\Leftrightarrow a_1 b_1 = a_2 b_2$

$$|\alpha \cdot \beta| \leq |\alpha| |\beta| \quad (| \cdot | \text{ 为模}) \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

$$\text{一般形式: 若 } a_i, b_i \in \mathbb{R} \ (i=1, 2, \dots, n), \text{ 则 } |\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \sum_{i=1}^n |b_i|$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ (x > -1, x \neq 0, n \geq 1, n \in \mathbb{N})$$

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}, \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x = \cos \theta, y = \sin \theta$$
$$a \leq x^2 + y^2 \leq b \rightarrow x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, a \leq r^2 \leq b$$

$$a+b=1 \rightarrow a = \frac{1}{2} + t, b = \frac{1}{2} - t$$

高考数学

复数

实部，虚部，纯虚数，共轭复数
复数的模，两复数相等，两复数加减乘除
复平面-横a，纵b 复数所在象限？

集合

集合间关系 交并补（对应符号）
解析式处理 绝对值，根号，平方等

条件

充分，必要，充要，既不充分也不必要 类比 $x>3$ 和 $x>5$

二项展开

第 $k+1$ 项公式
求某项系数，求未知字母

排列组合

排列 有差别， $A(5,2)=5 \times 4$ 谁特殊先排谁，常用逆向思维
组合 无差别， $C(5,2)=C(5,3)=5 \times 4 / 2 \times 1$

数列

等差，等比数列 $a(n), S_n$
复合数列 裂项相消法，逐步倒推法

程序框图

注意递增在前在后

解三角形

正弦定理，余弦定理 三角形面积 $S=absinC/2$
等式处理 纯角式 积化和差， $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
边角式 两边各项或分子分母各项都含有边（边化角）
边比较多，且有余弦角（角化边）
用多表少，被求表其他

线性规划

求最值 上下平移，三点代入
求未知字母 过固定点，旋转

参数方程

极坐标方程 直线，圆，椭圆，双曲线，抛物线
参数方程 直线，圆，椭圆，双曲线，抛物线

信息题

本身不难，紧扣条件

定积分

求交点，判上下，套公式 两函数
套公式 函数与坐标轴， $x=a, x=b$

不等式

$x+1/x \geq 2$, $x+a/x \geq 2\sqrt{a}$, 当 $x=a/x$ 时取得最小值
 $|x+a| \pm |x+b| \geq m$, 分类讨论去绝对值，先交后并
谁简单，同除以谁 分数形式

向量

$a \cdot b = |a||b|\cos\langle a, b \rangle$, 平行 $a=\lambda b$, 垂直 $a \cdot b = 0$
 $a \pm b = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$, $a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2$ 坐标表示

解析几何

线面关系（比划），三视图，投影（水平，垂直）
球，柱，锥 几何体表面积和体积公式
选点建系，求法向量，两角关系 二面角相关

函数

图象 指数，对数，幂函数
三角函数 分类 积化和差，倍角半角，单位圆（诱导公式）
伸缩变换与平移，单调性，极值，最值，最小正周期
性质 常见函数导数 单调性，奇偶性，周期性
复合函数导数

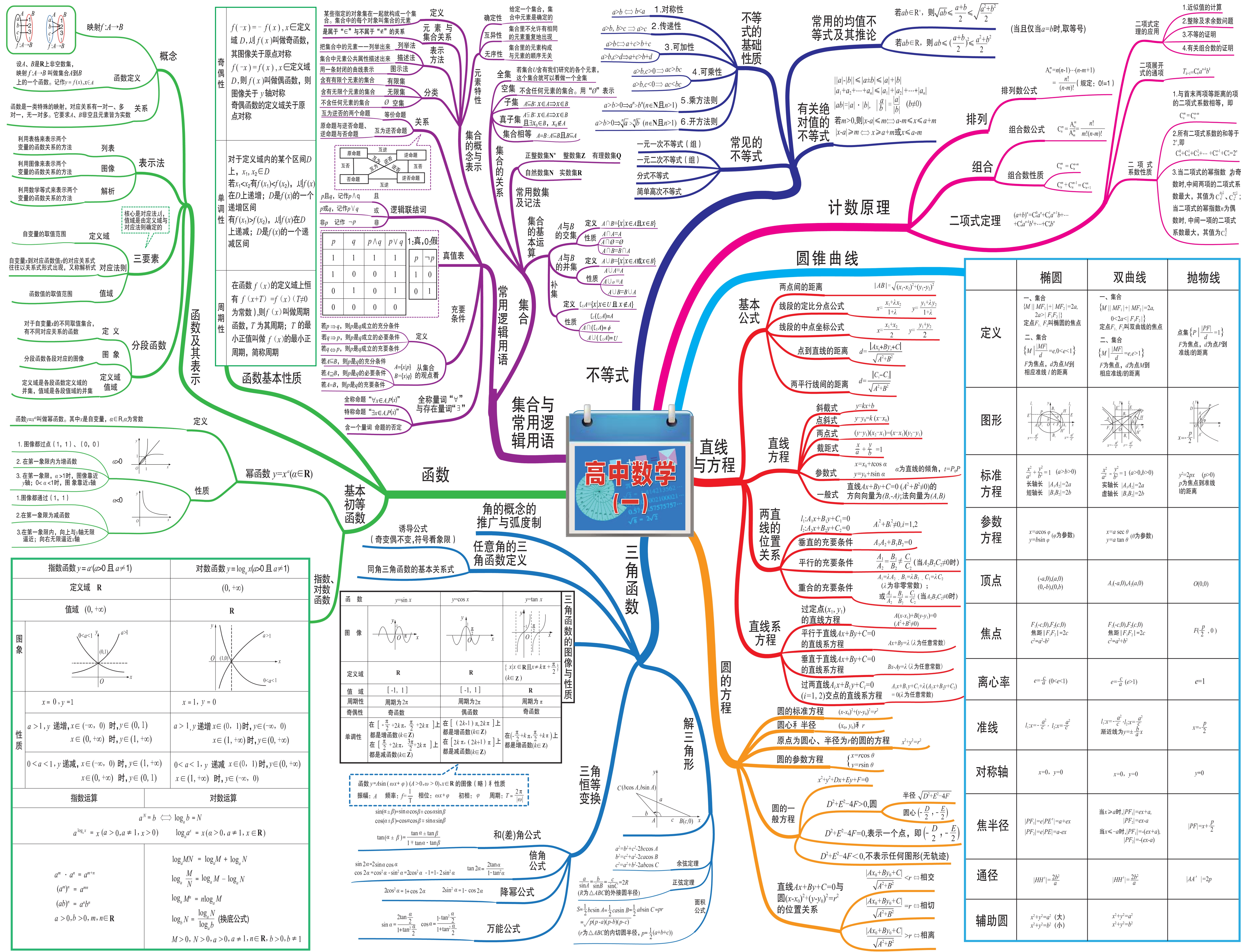
概率统计

分层抽样，频率分布直方图，正态分布
方差，线性回归方程
概率，分布列，数学期望

圆锥曲线

圆 标准方程，圆心坐标，切线垂直过切点的半径
椭圆 标准方程，第二定义式，长轴短轴焦点，离心率， $c^2 = a^2 - b^2$
双曲线 标准方程，第二定义式，实轴虚轴焦点，离心率， $c^2 = a^2 + b^2$ ，渐近线
抛物线 标准方程，第二定义式，焦点，准线

《思维导图伴你学》 考点思维导图——高中数学(一)



《思维导图伴你学》 考点思维导图——高中数学(二)

